

GELSON IEZZI

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Complexos
Polinômios
Equações

6

GELSON IEZZI

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Complexos
Polinômios

Equações



COMPLEMENTO PARA O PROFESSOR

8ª edição | São Paulo – 2013

© Gelson Iezzi, 2013

Copyright desta edição:

SARAIVA S. A. Livres Editores, São Paulo, 2013

Rua Henrique Schaumann, 270 — Pinheiros

05413-010 — São Paulo — SP

Fone: (0xx11) 3611-3308 — Fax vendas: (0xx11) 3611-3268

SAC: 0800-0117875

www.editorasaraiva.com.br

Todos os direitos reservados.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Iezzi, Gelson, 1939 —

Fundamentos de matemática elementar, 6 : complexos, polinômios, equações / Gelson Iezzi. — 8. ed. — São Paulo : Atual, 2013.

ISBN 978-85-357-1752-5 (aluno)

ISBN 978-85-357-1753-2 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Matemática (Ensino médio) — Problemas e exercícios etc. 3. Matemática (Vestibular) — Testes I. Título. II. Título: Complexos, polinômios, equações.

13-02579

CDD-510.7

Índice para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Complemento para o Professor — Fundamentos de matemática elementar — vol. 6

Gerente editorial: Lauri Cericato

Editor: José Luiz Carvalho da Cruz

Editores-assistentes: Fernando Manenti Santos/Guilherme Reghin Gaspar/Juracy Vespucci/
Paula Coelho/Livio A. D'Ottaviantonio

Auxiliares de serviços editoriais: Margarete Aparecida de Lima/Rafael Rabaçalho Ramos

Revisão: Pedro Cunha Jr. e Lilian Semenichin (coords.)/Renata Palermo/
Rhennan Santos/Felipe Toledo/Eduardo Sigrist/Luciana Azevedo/
Gabriela Moraes

Gerente de arte: Nair de Medeiros Barbosa

Supervisor de arte: Antonio Roberto Bressan

Projeto gráfico: Carlos Magno

Capa: Homem de Melo & Tróia Design

Imagem de capa: Ben Miners/Ikon Images/Getty Images

Diagramação: TPG

Encarregada de produção e arte: Grace Alves

Coordenadora de editoração eletrônica: Sílvia Regina E. Almeida

Produção gráfica: Robson Cacao Alves

Impressão e acabamento:

731.325.008.003



**Editora
Saraiva**

SAC

0800-0117875

De 2ª a 6ª, das 8h30 às 19h30

www.editorasaraiva.com.br/contato

Rua Henrique Schaumann, 270 – Cerqueira César – São Paulo/SP – 05413-909

Apresentação

Este livro é *Complemento para o Professor* do volume 6, Complexos / Polinômios / Equações, da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar*.

Cada volume desta coleção tem um complemento para o professor, com o objetivo de apresentar a solução dos exercícios mais complicados do livro e sugerir sua passagem aos alunos.

É nossa intenção aperfeiçoar continuamente os *Complementos*. Estamos abertos às sugestões e críticas, que nos devem ser encaminhados através da Editora.

Agradecemos ao professor Nobukazu Kagawa a colaboração na redação das soluções que são apresentadas neste *Complemento*.

Os Autores.

Sumário

CAPÍTULO I — Números complexos	1
CAPÍTULO II — Polinômios	15
CAPÍTULO III — Equações polinomiais	31
CAPÍTULO IV — Transformações	56
CAPÍTULO V — Raízes múltiplas e raízes comuns	62

CAPÍTULO I — Números complexos

$$12. \quad \frac{(2+i)^{101} \cdot (2-i)^{50}}{(-2-i)^{100} \cdot (i-2)^{49}} = \frac{(2+i)^{100} \cdot (2+i) \cdot (2-i)^{49} \cdot (2-i)}{[-(2+i)]^{100} \cdot [-(2-i)]^{49}} =$$

$$= \frac{(2+i) \cdot (2-i)}{-1} = -5$$

13. Temos:

$$(1+i)^2 = 2i, (1-i)^2 = -2i, (1+i)^4 = (2i)^2 = -4 \text{ e } (1-i)^4 = (-2i)^2 = -4,$$

então $(1+i)^4 = (1-i)^4$.

Se n é um número natural múltiplo de 4, ou seja, se $n = 4p$ com p natural, então:

$$(1+i)^n = (1+i)^{4p} = [(1+i)^4]^p = (-4)^p$$

$$(1-i)^n = (1-i)^{4p} = [(1-i)^4]^p = (-4)^p$$

$$\text{e daí } (1+i)^n = (1-i)^n.$$

Se n é um número natural não divisível por 4, chamemos de p o quociente da divisão de n por 4. O resto da divisão pode ser 1 ou 2 ou 3. Examinemos cada caso:

$$1^\circ) n = 4p + 1$$

$$(1+i)^n = (1+i)^{4p+1} = (1+i)^{4p}(1+i) = (1+i)(-4)^p$$

$$(1-i)^n = (1-i)^{4p+1} = (1-i)^{4p}(1-i) = (1-i)(-4)^p$$

$$2^\circ) n = 4p + 2$$

$$(1+i)^n = (1+i)^{4p+2} = (1+i)^{4p}(1+i)^2 = 2i(-4)^p$$

$$(1-i)^n = (1-i)^{4p+2} = (1-i)^{4p}(1-i)^2 = -2i(-4)^p$$

$$3^\circ) n = 4p + 3$$

$$(1+i)^n = (1+i)^{4p+3} = (1+i)^{4p}(1+i)^3 = (-2+2i)(-4)^p$$

$$(1-i)^n = (1-i)^{4p+3} = (1-i)^{4p}(1-i)^3 = (-2-2i)(-4)^p$$

Portanto a igualdade $(1+i)^n = (1-i)^n$ só se verifica quando n é divisível por 4.

$$16. \quad \begin{aligned} x &= a + ib \\ y &= c + id \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x + yi = (a-d) + (b+c)i = i & (1) \\ xi + y = (-b+c) + (a+d)i = 2i - 1 & (2) \end{cases}$$

$$\text{de (1) temos: } \begin{cases} a = d \\ b + c = 1 \end{cases}$$

$$\text{de (2) temos: } \begin{cases} -b + c = -1 \\ a + d = 2 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas de equações, temos: $a = d = b = 1$ e $c = 0$.

Portanto, $x = 1 + i$ e $y = i$.

- 17.** $z = (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
 $\text{Im}(z) = 0 \Rightarrow ad + bc = 0$
- 18.** $z = (a + bi)^4 = (a^4 + b^4 - 6a^2b^2) + 4ab(a^2 - b^2)i$
 $\text{Re}(z) < 0 \Rightarrow a^4 + b^4 - 6a^2b^2 < 0 \quad (1)$
 $\text{Im}(z) = 0 \Rightarrow 4ab(a^2 - b^2) = 0 \quad (2)$
 De (II) vem $a = 0$ ou $b = 0$ ou $a^2 - b^2 = 0$.
 Se $a = 0$, de (1) vem $b^4 < 0$. (impossível)
 Se $b = 0$, de (1) vem $a^4 < 0$. (impossível)
 Se $a^2 = b^2 = k$, de (1) vem $k^2 + k^2 - 6k^2 < 0$, que é satisfeita para todo k .
 Conclusão: devemos ter $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $a^2 = b^2$ ou, resumidamente, $ab \neq 0$ e $a = \pm b$.
- 24.** $u, v \in \mathbb{C}$, $u^2 - v^2 = 6$ e $\bar{u} + \bar{v} = 1 - i$
 $u = a + ib \Rightarrow \begin{cases} u + v = (a + c) + (b + d)i \\ \bar{u} + \bar{v} = \overline{u + v} = (a + c) - (b + d)i \end{cases}$
 $v = c + id$
 Então: $\begin{cases} a + c = 1 \\ b + d = 1 \end{cases}$
 $u - v = (u - v) \cdot \frac{u + v}{u + v} = \frac{u^2 - v^2}{u + v} = \frac{6}{u + v} \cdot \frac{\overline{u + v}}{\overline{u + v}} =$
 $= \frac{6(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = 3 - 3i.$
- 26.** $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^n = \left[\frac{(1 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}\right]^n = \left(\frac{2i}{2}\right)^n = (i)^n$
 Portanto, $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^n$ pode assumir os valores i , $-i$, 1 e -1 .
- 28.** $u = x + iy$ e $v = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $z = v \cdot \bar{u} = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x - iy) = \left(\frac{x}{2} - y\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{y}{2} + x\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$
 Então: $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}x - y\frac{\sqrt{3}}{2}.$
- 29.** $z = x + yi$ e $x^2 + y^2 \neq 0$
 $u = z + \frac{1}{z} = \frac{z^2 + 1}{z} = \frac{(z^2 + 1)\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{(x^2 + y^2 + 1)x}{x^2 + y^2} + \frac{(x^2 + y^2 - 1)y}{x^2 + y^2} \cdot i$
 $\text{Im}(u) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$
- 30.** $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 + z_2$ e $z_1 \cdot z_2$ são ambos reais.
 $z_1 = a + bi \Rightarrow \begin{cases} u = z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i \\ v = z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \end{cases}$
 $z_2 = c + di$

Como

$$\operatorname{Im}(u) = 0 \Rightarrow b = -d$$

$\operatorname{Im}(v) = 0 \Rightarrow ad = -bc$ e, resolvendo o sistema, temos:

ou $b = d = 0$ e a e c quaisquer

ou $b = -d \neq 0$ e $a = c$

Na 1ª solução, z_1 e z_2 são reais. Na 2ª solução, z_1 é o conjugado de z_2 .

$$31. \quad z = \frac{2 - xi}{1 + 2xi} = \frac{(2 - xi)(1 - 2xi)}{(1 + 2xi)(1 - 2xi)} = \frac{2 - 2x^2}{1 + 4x^2} - \frac{5x}{1 + 4x^2} \cdot i$$

$$\operatorname{Re}(z) = 0 \Rightarrow 2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$$32. \quad z = \frac{1 + 2i}{2 + ai} = \frac{(1 + 2i)(2 - ai)}{(2 + ai)(2 - ai)} = \frac{2 + 2a}{4 + a^2} + \frac{4 - a}{4 + a^2} \cdot i$$

$$\operatorname{Im}(z) = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$33. \quad z = 5 + 8i \text{ e } z' = 1 + i$$

$$z_1 = x + iy$$

$$u = z \cdot z_1 = (5x - 8y) + (8x + 5y)i \quad (1)$$

$$\operatorname{Im}(u) = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{8}y$$

$$v = \frac{z_1}{z'} = \frac{x + y}{2} + \frac{-x + y}{2} \cdot i \quad (2)$$

$$\operatorname{Re}(v) = 0 \Rightarrow x = -y$$

$$\operatorname{Im}(v) \neq 0 \Rightarrow x \neq y$$

de (1) e (2) temos: $x = y = 0$, o que é impossível.

$$34. \quad z = x + yi, \text{ então:}$$

$$\frac{z}{1 - i} + \frac{z - 1}{1 + i} = \frac{2x - 1}{2} + i \cdot \frac{2y + 1}{2} = \frac{5}{2} + i \cdot \frac{5}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3 \\ 2y + 1 = 5 \Rightarrow y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow z = 3 + 2i$$

$$36. \quad z = x + iy \text{ e } u = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = u \cdot \bar{z} = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot (x - iy) = \frac{x - y\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot x + y}{2} \cdot i$$

Então:

$$\operatorname{Re}(z_1) = \frac{x - y\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{Im}(z_1) = -\frac{\sqrt{3} \cdot x + y}{2}$$

37. Demonstração pelo princípio da indução finita.

Para $n = 0$, temos $\overline{z^0} = \overline{1} = 1 = (\overline{z})^0$.

Suponhamos $\overline{z^p} = (\overline{z})^p$ com $p \in \mathbb{N}$ e provemos que $\overline{z^{p+1}} = (\overline{z})^{p+1}$:

$$\overline{z^{p+1}} = \overline{z^p \cdot z} \stackrel{(1)}{=} \overline{z^p} \cdot \overline{z} \stackrel{(2)}{=} (\overline{z})^p \cdot \overline{z} = (\overline{z})^{p+1}.$$

A passagem (1) é justificada pelo teorema do item 15 e a (2), pela hipótese de indução.

38. $x^2 + (a + bi)x + (c + di) = 0$ admite uma raiz real.

Seja α a raiz real. Temos:

$$\alpha^2 + (a + bi)\alpha + (c + di) = 0$$

$$(\alpha^2 + a\alpha + c) + (b\alpha + d)i = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + a\alpha + c = 0 \\ b\alpha + d = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{d}{b} \Rightarrow \left(-\frac{d}{b}\right)^2 + a\left(-\frac{d}{b}\right) + c = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{b^2} - \frac{ad}{b} + c = 0 \Rightarrow adb = d^2 + b^2c.$$

40. $z = a + ib$ e $\overline{z} = a - ib$

$$z^3 = \overline{z} \Rightarrow (a + ib)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i = a - ib$$

Então:

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = a \Rightarrow a(a^2 - 3b^2 - 1) = 0 \\ 3a^2b - b^3 = -b \Rightarrow b(3a^2 - b^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

- Se $a = 0 \Rightarrow b = \pm 1$ e $z = i$ ou $z = -i$.
- Se $b = 0 \Rightarrow a = \pm 1$ e $z = 1$ ou $z = -1$.
- Se $a = b = 0 \Rightarrow z = 0$.

Portanto, $z = 0$ ou $z = i$ ou $z = -i$ ou $z = 1$ ou $z = -1$.

41. $z^2 = i$
 $z = a + bi \Rightarrow z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi = i$

Então:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases} \text{ e, resolvendo o sistema, temos:}$$

- Se $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Se $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

42. $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$
 $z = x + yi \Rightarrow z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi = 1 + i\sqrt{3}$

Então:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = \sqrt{3} \end{cases} \text{ e, resolvendo o sistema, temos:}$$

- Se $x = \frac{\sqrt{6}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Se $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

43. $x^2 + y^2 = 1$ (I) $\Rightarrow y^2 = x^2 - 1$ (II)

$$\frac{1+x+iy}{1+x-iy} = \frac{(1+x)+iy}{(1+x)-iy} \cdot \frac{(1+x)+iy}{(1+x)+iy} =$$

$$= \frac{[(1+x)^2 - y^2] + 2(1+x)yi}{(1+x)^2 + y^2} =$$

$$\stackrel{(II)}{=} \frac{[1+2x+x^2+(x^2-1)] + 2(1+x)yi}{1+2x+(x^2+y^2)} =$$

$$\stackrel{(I)}{=} \frac{2x(1+x) + 2(1+x)yi}{1+2x+1} =$$

$$= \frac{2x(1+x) + 2(1+x)yi}{2(1+x)} =$$

$$= x + iy$$

44. $f(x) = \frac{1 + \operatorname{sen} x + i \cdot \cos x}{1 - \operatorname{sen} x - i \cdot \cos x} = \frac{1 + \operatorname{sen} x + i \cdot \cos x}{1 - \operatorname{sen} x - i \cdot \cos x} \cdot \frac{1 - \operatorname{sen} x + i \cdot \cos x}{1 - \operatorname{sen} x + i \cdot \cos x} =$

$$= \frac{[(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x) + \cos^2 x] - [1 + \operatorname{sen} x + 1 - \operatorname{sen} x] \cdot \cos x \cdot i}{(1 - \operatorname{sen} x)^2 + \cos^2 x} =$$

$$= \frac{i \cdot \cos x}{(1 - \operatorname{sen} x)} = h(x)$$

$$g(x) = (\operatorname{tg} x + \sec x)i = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} \right) i = \frac{(\operatorname{sen} x + 1)i}{\cos x} =$$

$$= \frac{(1 + \operatorname{sen} x) \cdot \cos x \cdot i}{\cos^2 x} = \frac{i \cdot \cos x}{1 - \operatorname{sen} x} = h(x)$$

Então: $f(x) = g(x), \forall x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

52. a) $z = 1 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$
 Então: $|z^3| = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$.

b) $z = 1 - i \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$
 Então: $|z^4| = (\sqrt{2})^4 = 4$.

c) $z = (5 + 12i)i = -12 + 5i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = 13$
 ou
 $z_1 = 5 + 12i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$
 $z_2 = i \Rightarrow |z_2| = 1$
 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = 13 \cdot 1 = 13$

$$d) z_1 = 1 + i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{2}$$

$$z_2 = 2 + 2i \Rightarrow |z_2| = 2\sqrt{2}$$

$$z_3 = 4 + 4i \Rightarrow |z_3| = 4\sqrt{2}$$

Então:

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot z_3| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| = (\sqrt{2})(2\sqrt{2})(4\sqrt{2}) = 16\sqrt{2}.$$

$$e) z_1 = 1 + i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{2}$$

$$z_2 = 2 - 2i \Rightarrow |z_2| = 2\sqrt{2}$$

Então:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

$$f) z_1 = 5i \Rightarrow |z_1| = 5$$

$$z_2 = 3 + 4i \Rightarrow |z_2| = 5$$

Então:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{5}{5} = 1.$$

57.

$$|z| = |w| = 1 \text{ e } 1 + zw \neq 0$$

$$z = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha, w = \cos \beta + i \operatorname{sen} \beta$$

$$z + w = (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) + (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) =$$

$$= (\cos \alpha + \cos \beta) + i(\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta) =$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2i \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} =$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$1 + zw = 1 + (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) =$$

$$= 1 + (\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + i(\cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cos \beta) =$$

$$= 1 + \cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta) =$$

$$= 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 2i \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} =$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

Então:

$$\frac{z + w}{1 + zw} = \frac{2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \right)}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \right)} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

Portanto, $\frac{z + w}{1 + zw}$ é real.

58.

$$z_1 = \rho (\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$$

$$z_2 = \rho (\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$$

Então:

$$\begin{aligned} z_1 - i z_2 &= \rho (\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) - i \rho (\operatorname{sen} \phi + i \cos \phi) \\ &= \rho (\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) + \rho (\cos \phi - i \operatorname{sen} \phi) \\ &= 2\rho \cos \phi \end{aligned}$$

 Portanto, $z_1 - i z_2$ é real.

59.

$$z_1 = \cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha \text{ e } z_2 = \cos \beta + i \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$z_1 + z_2 = 1 \Rightarrow (\cos \alpha + \cos \beta) + i \cdot (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\cos \alpha + \cos \beta = 1 \text{ e } \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\cos \alpha = \cos \beta = \frac{1}{2} \text{ e } \operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen} \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\text{Portanto, } z_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } z_2 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

65.

 Determinemos as coordenadas de P_1, P_2, P_3 e P_4 , afixos de $b, b + z, b + z + iz$ e $b + iz$, respectivamente:

$$b = 2 \cdot (\cos 30^\circ + i \cdot \operatorname{sen} 30^\circ) = \sqrt{3} + i \Rightarrow P_1 = (\sqrt{3}, 1)$$

$$b + z = (\sqrt{3} + \rho \cdot \cos \theta) + i(1 + \rho \cdot \operatorname{sen} \theta) \Rightarrow P_2 = (\sqrt{3} + \rho \cdot \cos \theta, 1 + \rho \cdot \operatorname{sen} \theta)$$

$$\begin{aligned} b + z + iz &= (\sqrt{3} + \rho \cdot \cos \theta - \rho \cdot \operatorname{sen} \theta) + i(1 + \rho \cdot \operatorname{sen} \theta + \rho \cdot \cos \theta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow P_3 = (\sqrt{3} + \rho \cdot \cos \theta - \rho \cdot \operatorname{sen} \theta, 1 + \rho \cdot \operatorname{sen} \theta + \rho \cdot \cos \theta) \end{aligned}$$

$$b + iz = (\sqrt{3} - \rho \cdot \operatorname{sen} \theta) + i \cdot (1 + \rho \cdot \cos \theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_4 = (\sqrt{3} - \rho \cdot \operatorname{sen} \theta, 1 + \rho \cdot \cos \theta)$$

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\rho^2 \cdot \cos^2 \theta + \rho^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \theta} = \rho \text{ e } m_{P_1 P_2} = \operatorname{tg} \theta$$

$$\overline{P_2 P_3} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\rho \cdot \operatorname{sen} \theta)^2 + (\rho \cdot \cos \theta)^2} = \rho \text{ e } m_{P_2 P_3} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \theta}$$

$$\overline{P_3 P_4} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\rho \cdot \cos \theta)^2 + (\rho \cdot \operatorname{sen} \theta)^2} = \rho \text{ e } m_{P_3 P_4} = \operatorname{tg} \theta$$

$$\overline{P_4 P_1} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\rho \cdot \operatorname{sen} \theta)^2 + (\rho \cdot \cos \theta)^2} = \rho \text{ e } m_{P_4 P_1} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \theta}$$

 Então $P_1 P_2 P_3 P_4$ é um quadrado.

66.

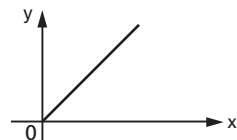
$$z = x + yi, \bar{z} = x - yi$$

$$\frac{z}{\bar{z}} = -i \Rightarrow \frac{x + yi}{x - yi} = -i \Rightarrow x + yi = -y - xi \Rightarrow y = -x$$

 E esta condição é satisfeita pelos pontos da reta $x = -y$, bissetriz do 2º e 4º quadrantes do plano de Argand-Gauss.

67. $z_1 \neq x$ e $z_1 = r(\cos a + i \sin a)$
 $z_2 \neq 0$ e $z_2 = s(\cos b + i \sin b)$

Então: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r(\cos a + i \sin a)}{s(\cos b + i \sin b)}$



$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r(\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b) + i(-\sin b \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos b)}{s(\cos^2 b + \sin^2 b)}$$

$$= \frac{r}{s} [\cos(a - b) + i \sin(a - b)]$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0 \Rightarrow \sin(a - b) = 0 \Rightarrow a = b \text{ ou } a = b + \pi$$

Então, $\frac{z_1}{z_2} = \pm \frac{r}{s}$ é uma reta que passa pela origem.

69. $|z - (1 + i)| \leq 1$

$z = x + iy$

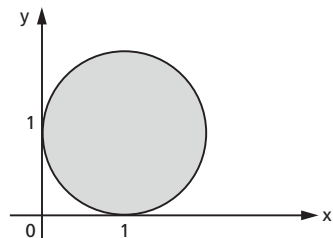
Temos:

$$|z - (1 + i)| = |(x - 1) + i(y - 1)|$$

$$= \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$$

Então:

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ representa um círculo de centro $(1, 1)$ e raio 1.



70. $z = x + yi$ e $t = 2 + 3i$

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - t| \leq 1\} =$$

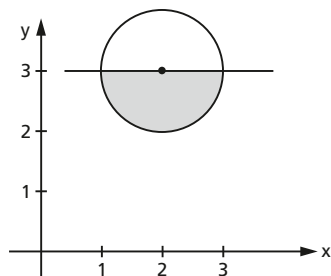
$$= \{z \in \mathbb{C} \mid (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 1\}$$

é um círculo de centro $(2, 3)$ e raio 1

$$B = \{x \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \leq 3\}$$

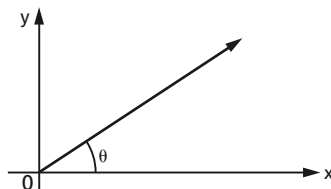
é um semiplano situado da reta $y = 3$ para baixo.

$A \cap B$ representa um semicírculo.



71. $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, θ fixo.

Como ρ percorre $\mathbb{R}$, z representa uma semirreta com origem O e formando ângulo θ com o eixo dos x .



72. a) $z = x + iy$

Então:

$$w = 1 - \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{x + iy} =$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - x}{x^2 + y^2} + \frac{iy}{x^2 + y^2}$$

u é a parte real e v a parte imaginária do complexo w .

Então:

$$u = \frac{x^2 + y^2 - x}{x^2 + y^2}$$

$$v = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

b) Se $y = x$, então $u = \frac{2x^2 - x}{2x^2} = 1 - \frac{1}{2x}$ e $v = \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x}$.

Daí $u = 1 - v$, portanto $Q = u + iv$ percorre a reta $u = 1 - v$.
Notemos para encerrar que $v \neq 0$, caso contrário $y = 0 = x$ e anula-se z .

73. Seja $z = x + yi$ um número complexo que satisfaz a condição $|z - 25i| \leq 15$, então:

$$|x + (y - 25)i| \leq 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + (y - 25)^2 \leq 225.$$

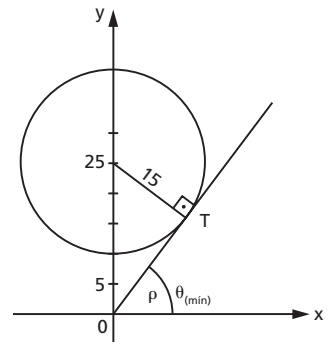
Conclui-se que z pode ser qualquer complexo representado por ponto do círculo de centro $(0, 25)$ e raio 15 (ver figura).

O complexo que tem o menor argumento é representado por $T(x, y)$, ponto de tangência da reta $\vec{OT}$ com o círculo. T satisfaz duas condições:

$$\overline{OT}^2 = 25^2 - 15^2 = 400 \Rightarrow x^2 + y^2 = 400$$

$$T \text{ está na circunferência} \Rightarrow x^2 + (y - 25)^2 = 225.$$

Resolvendo o sistema, temos $x = 12$ e $y = 16$, então $z = 12 + 16i$.



74. $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$

Então:

$$z^2 + \rho^2 = \rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cdot \cos \theta) + \rho^2 =$$

$$= \rho^2 (2 \cos^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta) =$$

$$= 2\rho^2 \cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\frac{z}{z^2 + \rho^2} = \frac{\rho (\cos \theta + i \sin \theta)}{2\rho^2 \cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta)} =$$

$$= \frac{1}{2\rho \cos \theta} \left(\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) \text{ é real.}$$

$$iz = ip(\cos \theta + i \sin \theta) = p(-\sin \theta + i \cos \theta)$$

Então:

$$\begin{aligned} \frac{p - iz}{p + iz} &= \frac{p(1 + \sin \theta - i \cos \theta)}{p(1 - \sin \theta + \cos \theta)} = \\ &= \frac{1 + \sin \theta - i \cos \theta}{1 - \sin \theta + i \cos \theta} \cdot \frac{1 - \sin \theta - i \cos \theta}{1 - \sin \theta - i \cos \theta} = \\ &= \frac{(1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - i[(1 + \sin \theta) \cos \theta + \cos \theta (1 - \sin \theta)]}{1 - 2 \sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \\ &= -\frac{2i \cos \theta}{2(1 - \sin \theta)} = \\ &= i \frac{\cos \theta}{\sin \theta - 1} \left(\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) \text{ é imaginário puro.} \end{aligned}$$

75.

$$a) |a + bi| = 5 \Rightarrow a^2 + b^2 = 25 \quad (1)$$

$$b - a = 1 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$a = 3 \text{ e } b = 4 \text{ ou } a = -4 \text{ e } b = -3.$$

$$\text{Como } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow a + bi = 3 + 4i.$$

$$b) (c + di)^2 = (c^2 - d^2) + 2icd = -5 - 12i$$

Então:

$$\begin{cases} c^2 - d^2 = -5 \\ 2cd = -12 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$c = -2 \text{ ou } c = 2.$$

$$\text{Como } c < 0, \text{ temos que } c = -2 \text{ e } d = 3 \text{ e } c + di = -2 + 3i.$$

Então:

$$\begin{aligned} \frac{(a + bi)^2}{c + di} - \frac{1}{a + ci} - \frac{1 + i}{13i} &= \\ &= \frac{(3 + 4i)^2}{-2 + 3i} \cdot \frac{-2 - 3i}{-2 - 3i} - \frac{1}{3 - 2i} \cdot \frac{3 + 2i}{3 + 2i} - \frac{1 - i}{13} = \\ &= \frac{(-7 + 24i)(-2 - 3i)}{4 + 9} - \frac{3 + 2i}{9 + 4} - \frac{1 - i}{13} = \\ &= \frac{86 - 27i}{13} - \frac{4 + i}{13} = \\ &= \frac{82}{13} - i \frac{28}{13}. \end{aligned}$$

82.

$$z = \sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$z^n = (\sqrt{3} + i)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} \right)$$

Então:

$$\begin{aligned} \text{Im}(z^n) = 0 &\Rightarrow \sin \frac{n\pi}{6} = 0 \\ \text{a) } z^n \text{ é real e positivo} &\Rightarrow \text{Re}(z^n) > 0 \Rightarrow \cos \frac{n\pi}{6} > 0 \\ &\Rightarrow \frac{n\pi}{6} = 2k\pi \Rightarrow n = 12k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Então, o menor valor de n para que z^n seja real e positivo é $n = 0$.

$$\begin{aligned} \text{b) } z^n \text{ é real e negativo} &\Rightarrow \text{Im}(z^n) = 0 \Rightarrow \text{Re}(z^n) < 0 \\ &\Rightarrow \sin \frac{n\pi}{6} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi \Rightarrow n = 6(2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots) \\ &\Rightarrow \cos \frac{n\pi}{6} < 0 \end{aligned}$$

Então, o menor valor de n para que z^n seja real e negativo é $n = 6$.

$$\begin{aligned} \text{c) } z^n \text{ é imaginário puro} &\Rightarrow \text{Im}(z^n) \neq 0 \Rightarrow \text{Re}(z^n) = 0 \\ &\Rightarrow \sin \frac{n\pi}{6} \neq 0 \\ &\Rightarrow \cos \frac{n\pi}{6} = 0 \Rightarrow \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow n = 3 + 6k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Então, o menor valor de n para que z^n seja imaginário puro é $n = 3$.

83.

$$z = a + bi$$

$$\begin{aligned} \text{a) } iz + 2\bar{z} + 1 - i = 0 &\Rightarrow i(a + bi) + 2(a - bi) = -1 + i \Rightarrow \\ &\Rightarrow (2a - b) + (a - 2b)i = -1 + i \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = -1 \\ a - 2b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, temos $a = -1$ e $b = -1$.

Então, $z = -1 - i$.

$$\text{b) } z = -1 - i$$

$$\text{Então, } |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \text{ e}$$

$$z = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$\text{temos, portanto: } \arg z = \frac{5\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } z^{1004} &= (\sqrt{2})^{1004} \left(\cos \frac{1004 \cdot 5\pi}{4} + i \sin \frac{1004 \cdot 5\pi}{4} \right) = \\ &= 2^{502} (\cos \pi + i \sin \pi) = \\ &= 2^{502} (-1) = \\ &= -2^{502} \end{aligned}$$

89. $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ é uma das raízes quartas de z , então

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = z \Rightarrow z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 (1 + i)^4 = \frac{1}{4} (-4) = -1.$$

Logo, $z = \cos \pi + i \sin \pi$ e

$$\sqrt{z} = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{2} \quad (k = 0, 1)$$

$$w_0 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$w_1 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

Portanto, as raízes quadradas de z são i e $-i$.

90. -2 é uma das raízes sextas do complexo z ; então

$$(-2)^6 = z \Rightarrow z = 64 = 64(\cos 0 + i \cdot \sin 0).$$

As raízes sextas de z são dadas pela fórmula:

$$z_k = 2 \cdot \left[\cos \frac{0 + 2k\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{0 + 2k\pi}{6} \right] \text{ com } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = 2(\cos 0 + i \cdot \sin 0) = 2$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$k = 2 \Rightarrow z_2 = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

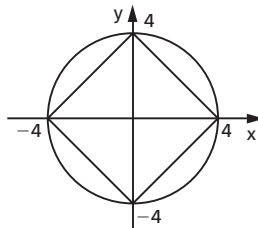
$$k = 3 \Rightarrow z_3 = 2(\cos \pi + i \cdot \sin \pi) = -2$$

$$k = 4 \Rightarrow z_4 = 2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{3}\right) = -1 - i\sqrt{3}$$

$$k = 5 \Rightarrow z_5 = 2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$$

91. $z = 256 \Rightarrow |z| = 256$ e $\theta = 0$.

As raízes quartas de z são os vértices do quadrado inscrito na circunferência de raio $\sqrt[4]{256} = 4$ e centro na origem, tendo uma delas argumento 0.



92. $2i$ é uma das raízes sextas do complexo z , então:

$$(2i)^6 = z \Rightarrow z = -64 = 64(\cos \pi + i \sin \pi).$$

As raízes sextas de z são dadas pela fórmula:

$$z_k = 2 \left[\cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi + 2k\pi}{6} \right] \text{ em que } k \text{ é um dos naturais } 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2}\right) = 2i$$

$$k = 2 \Rightarrow z_2 = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$k = 3 \Rightarrow z_3 = 2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$k = 4 \Rightarrow z_4 = 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2}\right) = -2i$$

$$k = 5 \Rightarrow z_5 = 2\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$$

Portanto, os números complexos representados pelos outros cinco vértices do hexágono são: $\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} - i$, $-2i$ e $\sqrt{3} - i$.

93. $z = i + \sqrt[3]{-8i}$

Seja $u = -8i \Rightarrow \rho = |-8i| = 8$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$$u = 8\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$$

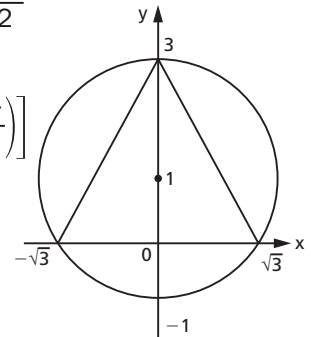
$$\sqrt[3]{u} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

Então:

$$w_0 = 2i \text{ e } z = i + 2i = 3i$$

$$w_1 = -\sqrt{3} - i \text{ e } z = i - \sqrt{3} - i = -\sqrt{3}$$

$$w_2 = \sqrt{3} - i \text{ e } z = i + \sqrt{3} - i = \sqrt{3}.$$



94. $(z - 1 + i)^4 = 1 \Rightarrow z - 1 + i = \sqrt[4]{1}$

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{\rho}\left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{4}\right)$$

$$u = 1 \Rightarrow \rho = |u| = 1 \text{ e } \theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{1} = \cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2}$$

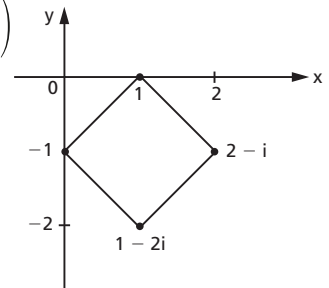
Então:

$$w_0 = 1 \Rightarrow z = 2 - i$$

$$w_1 = i \Rightarrow z = 1$$

$$w_2 = -1 \Rightarrow z = -i$$

$$w_3 = -i \Rightarrow z = 1 - 2i.$$



95. Seja $z = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$. As raízes $2n$ -ésimas de z são os números complexos:

$$z_k = \sqrt[2n]{\rho}\left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{2n} + i \cdot \sin \frac{\theta + 2k\pi}{2n}\right) \text{ com } k \text{ variando de } 0 \text{ a } 2n - 1.$$

A soma dessas raízes é:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} z_k = \sqrt[n]{p} \cdot \left(\sum_{k=0}^{2n-1} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{2n} + i \cdot \sum_{k=0}^{2n-1} \sin \frac{\theta + 2k\pi}{2n} \right).$$

Para cada k_1 atribuído a k , com $0 \leq k_1 < n$, existe um $k_2 = k_1 + n$, com $n \leq k \leq 2n$ tal que:

$$\cos \frac{\theta + 2k_2\pi}{2n} = \cos \frac{\theta + 2(k_1 + n)\pi}{2n} = \cos \left(\frac{\theta + 2k_1\pi}{2n} + \pi \right) = -\cos \frac{\theta + 2k_1\pi}{2n}$$

$$\sin \frac{\theta + 2k_2\pi}{2n} = \sin \frac{\theta + 2(k_1 + n)\pi}{2n} = \sin \left(\frac{\theta + 2k_1\pi}{2n} + \pi \right) = -\sin \frac{\theta + 2k_1\pi}{2n}$$

Então:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{2n} = 0 \text{ e } \sum_{k=0}^{2n-1} \sin \frac{\theta + 2k\pi}{2n} = 0$$

(pois as paralelas são duas a duas opostas)

$$\text{e daí } \sum_{k=0}^{2n-1} z_k = 0.$$

96. Seja $z = a + ib$.

Então:

$$z^2 = \bar{z}i$$

$$z^2 = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi \Rightarrow$$

$$\bar{z}i = (a + ib)i = -b + ai$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = -b \\ 2ab = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ ou } b = -1 \\ b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Então: $z = 0$ ou $z = -i$ ou $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ou $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e, portanto, o número de pontos é 4.

97. $z = x + iy$; $|z - 1|^2 = 2x$ e $y \geq 2$.

Então:

$|z - 1|^2 = |(x - 1) + yi|^2 = \sqrt{[(x - 1)^2 + y^2]^2} = 2x \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$
é uma circunferência de centro $(2, 0)$ e raio $\sqrt{3}$. Como $y \geq 2 \geq \sqrt{3}$, o conjunto é vazio.

98. Seja $z = a + ib$.

Então:

$$iz + 2\bar{z} + 1 - i = 0 \Rightarrow i(a + ib) + 2(a - ib) + 1 - i = 0$$

$$(2a - b) + (a - 2b)i = -1 + i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - b = -1 \\ a - 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \text{ e } b = -1 \text{ e, portanto, } z = -(1 + i).$$

99. $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$

Temos:

$$|z| = \sqrt{r^2(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)}$$

$$z^2 = r^2 (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$$

$$z^2 + |z| = 0 \Rightarrow (r^2 \cdot \cos 2\theta + r) + i \cdot \operatorname{sen} 2\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 \cos 2\theta + r = 0 \\ r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações, temos: $r = 0$ ou $(\operatorname{sen} 2\theta = 0, \cos 2\theta = -1 \text{ e } r = 1)$. Daí vem:

$$z = 0 \text{ ou}$$

$$z = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = i \text{ ou } z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \frac{3\pi}{2} = -i.$$

Portanto, o número de soluções da equação é 3.

100. $z_k = x + yi$

$$(z_k + 1)^5 + z_k^5 = 0 \Rightarrow (z_k + 1)^5 = -z_k^5 \Rightarrow |(z_k + 1)^5| = |z_k^5| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z_k + 1| = |z_k| \Rightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Então todos os z_k , com $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, têm a mesma parte real e estão sobre uma reta paralela ao eixo imaginário.

CAPÍTULO II — Polinômios

109. A soma dos coeficientes de $(4x^3 - 2x^2 - 2x - 1)^{36}$ é

$$p(1) = (4 - 2 - 2 - 1)^{36} = (-1)^{36} = 1.$$

110. $f(x) = 0$ para todo x do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, temos:

$$f(1) = a + b + c + d = 0$$

$$f(2) = 8a + 4b + 2c + d = 0$$

$$f(3) = 27a + 9b + 3c + d = 0$$

$$f(4) = 64a + 16b + 4c + d = 0$$

$$f(5) = 125a + 25b + 5c + d = 0$$

$$\text{Resolvendo o sistema, encontramos } a = b = c = d = 0 \Rightarrow f(6) = 0.$$

111. $f = (a - 2)x^3 + (b + 2)x + (3 - c) = 0$

Temos:

$$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$3 - c = 0 \Rightarrow c = 3.$$

112. $f(x) = (a + b - 5)x^2 + (b + c - 7)x + (a + c)$ e $f(x) \equiv 0$

Temos:

$$a + b - 5 = 0$$

$$b + c - 7 = 0$$

$$a + c = 0.$$

Resolvendo o sistema, temos: $a = -1$, $b = 6$ e $c = 1$.

113. Sendo $f = (m \cdot n - 2)x^3 + (m^2 - n^2 - 3)x^2 + (m + n - 3)x + 2m - 5n + 1$

e se $f(x) \equiv 0$, temos:

$$m \cdot n - 2 = 0$$

$$m^2 - n^2 - 3 = 0$$

$$m + n - 3 = 0$$

$$2m - 5n + 1 = 0.$$

Resolvendo o sistema, temos $m = 2$ e $n = 1$ e, portanto:

$$m^2 + n^2 = 2^2 + 1^2 = 5.$$

114. $f(x) = (a - 1)x^2 + bx + c$, $g(x) = 2ax^2 + 2bx - c$ e $f(x) \equiv g(x)$. Temos:

$$\begin{cases} a - 1 = 2a \Rightarrow a = -1 \\ b = 2b \Rightarrow b = 0 \\ c = -c \Rightarrow c = 0 \end{cases}$$

116. $\frac{ax^2 - bx - 5}{3x^2 + 7x + c} = 3 \Rightarrow ax^2 - bx - 5 = 9x^2 + 21x + 3c, \forall x$

$$\begin{cases} a = 9 \\ -b = 21 \Rightarrow b = -21 \\ -5 = 3c \Rightarrow c = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

117. $\frac{3x^2 + 5x - 8}{ax^2 - 10x + b} = k, \forall x \in \mathbb{C}$

Então:

$$3x^2 + 5x - 8 = (ax^2 - 10x + b) \cdot k, \forall x \in \mathbb{C}$$

e daí:

$$3 = ka, 5 = -10k \text{ e } -8 = kb.$$

Resolvendo esse sistema, temos $a = -6$ e $b = 16 \Rightarrow a + b = 10$

118. $\frac{(m - 1)x^3 + (n - 2)x^2 + (p - 3)x + 8}{2x^2 + 3x + 4} = k, \forall x \in \mathbb{C}$

Então:

$$(m - 1)x^3 + (n - 2)x^2 + (p - 3)x + 8 = 2kx^2 + 3kx + 4k, \forall x \in \mathbb{C}$$

e daí:

$$m - 1 = 0, n - 2 = 2k, p - 3 = 3k \text{ e } 8 = 4k.$$

Resolvendo esse sistema, temos $m = 1, n = 6$ e $p = 9$.

124. $f = x^2, g = x^2 + x^4, h = x^2 + x^4 + x^6,$
 $k = 3x^6 - 6x^4 + 2x^2$ e
 $k = af + bg + ch = ax^2 + b(x^2 + x^4) + c(x^2 + x^4 + x^6)$
 $= cx^6 + (b + c)x^4 + (a + b + c)x^2$
 Então, $c = 3, b + c = -6, a + b + c = 2$
 Portanto: $a = 8; b = -9; c = 3$.

125. $x^2 - 2x + 1 = a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x + 1)$
 $= (a + b)x^2 + (a + b + c)x + (a + c)$
 Então: $a + b + c = -2$.

126. $2x^2 + 17 \equiv (x^2 + b)^2 - (x^2 - a^2)(x^2 + a^2), a > 0, b > 0$
 $\equiv 2bx^2 + b^2 + a^4$
 Então:

$$\begin{cases} 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \\ b^2 + a^4 = 17 \Rightarrow a = \pm 2. \text{ Como } a > 0 \Rightarrow a = 2 \text{ e, portanto, } a - b = 1. \end{cases}$$

127. $a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + a_3p_3(x) = 0$
 $a_1(x^2 + 2x + 1) + a_2(x^2 + 1) + a_3(x^2 + 2x + 2) = 0$
 $(a_1 + a_2 + a_3)x^2 + 2(a_1 + a_3)x + (a_1 + a_2 + 2a_3) = 0$
 Então:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_1 + 2a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ e, portanto, $p_1(x), p_2(x)$ e $p_3(x)$ são L.I.

128. $f = (x - 1)^2 + (x - 3)^2 - 2(x - 2)^2 - 2 =$
 $= (x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 6x + 9) - 2(x^2 - 4x + 4) - 2 =$
 $= (1 + 1 - 2)x^2 + (-2 - 6 + 8)x + (1 + 9 - 8 - 2) =$
 $= 0x^2 + 0x + 0$
 $= 0$

129. $f = x^2 + px + q$ e $g = x^2 - (p + q)x + pq$
 $f = g \Rightarrow (p = -p - q \text{ e } q = pq)$
 Resolvendo esse sistema, temos:
 $p = q = 0$ ou $(p = 1 \text{ e } q = -2)$.

130. a) $a(x^2 - 1) + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx - a + c = 0$

Então:

$$a = 0$$

$$b = 0$$

$$-a + c = 0 \Rightarrow a = c = 0.$$

b) $a(x^2 + x) + (b + c)x + c = x^2 + 4x + 2 \Rightarrow$

$$ax^2 + (a + b + c)x + c = x^2 + 4x + 2. \text{ Então:}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

c) $x^3 - ax(x + 1) + b(x^2 - 1) + cx + 4 = x^3 - 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^3 + (b - a)x^2 + (c - a)x - b + 4 = x^3 - 2. \text{ Então:}$$

$$b - a = 0 \Rightarrow b = a$$

$$c - a = 0 \Rightarrow c = a$$

$$4 - b = -2 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a = c = 6.$$

131. $f = (x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1)(x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1) =$
 $= f = x^2(x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1) + \sqrt{2} \cdot x(x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1) + 1 \cdot (x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1) =$
 $= x^4 - \sqrt{2} \cdot x^3 + x^2 + \sqrt{2} \cdot x^3 - 2x^2 + \sqrt{2} \cdot x + x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1 =$
 $= x^4 + (\sqrt{2} - \sqrt{2})x^3 + (1 - 2 + 1)x^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{2})x + 1 =$
 $= x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 =$
 $= x^4 + 1 =$
 $= g$

132. $f = x^3 + \alpha x + \beta$

$$g = x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x + 2x^2 - x^4 = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$f = g$ impossível porque os coeficientes de x^3 são distintos e os de x^2 também.

134. f é polinômio quadrado perfeito se existir $px + q$ tal que $f = (px + q)^2$.

Então:

$$f = (ax + b)^2 + (cx + d)^2 = (a^2 + c^2)x^2 + 2(ab + cd)x + b^2 + d^2 =$$

$$= p^2x^2 + 2pqx + q^2$$

Então:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = p^2 & (1) \\ 2(ab + cd) = 2pq & (2) \\ b^2 + d^2 = q^2 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(ab + cd) = 2pq & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow (ab + cd)^2 = (pq)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ab)^2 + 2abcd + (cd)^2 = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ab)^2 + 2abcd + (cd)^2 = (ab)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (cd)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ad)^2 - 2abcd + (bc)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ad - bc)^2 = 0 \Rightarrow ad = bc$$

135. $4x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 4(p+1)x + (p+1)^2 = (ax^2 + bx + c)^2 =$
 $= a^2x^4 + 2abx^3 + (2ac + b^2)x^2 + 2bcx + c^2$

Então:

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$2ab = -8 \Rightarrow \begin{cases} \text{se } a = 2 \Rightarrow b = -2 \\ \text{se } a = -2 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

$$2ac + b^2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} \text{se } a = 2 \Rightarrow c = 1 \\ \text{se } a = -2 \Rightarrow c = -1 \end{cases}$$

$$c^2 = (p+1)^2 \Rightarrow \begin{cases} p = -2 \\ p = 0 \end{cases}$$

$$2bc = -4(p+1) \Rightarrow 2(-2) = -4(p+1) \Rightarrow p = 0$$

Portanto: $p = 0$.

136. $P(x)$ é um cubo perfeito se existirem p e q tais que $P(x) = (px + q)^3$.
 Temos: $P(x) = p^3 \cdot x^3 + 3p^2qx^2 + 3p \cdot q^2x + q^3$.

Então:

$$A = p^3 \text{ (1); } B = 3p^2q \text{ (2); } C = 3pq^2 \text{ (3); } D = q^3 \text{ (4)}$$

$$(2) \Rightarrow B^2 = (3p^2q)^2 \xrightarrow{(3)} \frac{B^2}{C} = \frac{9p^4q^2}{3pq^2} = 3p^3 \xrightarrow{(1)} 3A \Rightarrow C = \frac{B^2}{3A}.$$

$$(2) \Rightarrow B^3 = (3p^2q)^3 = 27p^6q^3 \xrightarrow{(4)} 27A^2 \cdot D \Rightarrow D = \frac{B^3}{27A^2}.$$

$$\text{Portanto: } C = \frac{B^2}{3A} \text{ e } D = \frac{B^3}{27A^2}.$$

137. $(k+1)x^2 + (k-3)x + 13 = (x+a)^2 + (x+b)^2 =$
 $= 2x^2 + 2(a+b)x + a^2 + b^2$

Então:

$$\begin{cases} k+1 = 2 \Rightarrow k = 1 \\ k-3 = 2(a+b) \Rightarrow a+b = -1 \\ 13 = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \Rightarrow b = 2 \\ a = 2 \Rightarrow b = -3 \end{cases}$$

Conclusão: para $k = 1$, o trinômio dado fica $2x^2 - 2x + 13$, que é igual a $(x-3)^2 + (x+2)^2$.

138. $-6x^2 + 36x - 56 = (x-b)^3 - (x-a)^3 =$
 $= 3(a-b)x^2 + 3(b^2 - a^2)x + a^3 - b^3$

Então:

$$\begin{cases} 3(a-b) = -6 \Rightarrow a-b = -2 \\ 3(b^2 - a^2) = 36 \Rightarrow b^2 - a^2 = 12 \\ a^3 - b^3 = -56 \end{cases} \Rightarrow b = 4 \text{ e } a = 2$$

$$\text{Portanto: } -6x^2 + 36x - 56 = (x-4)^3 - (x-2)^3.$$

139. $f = g^2 \Rightarrow \begin{cases} f = x^4 + 2\alpha x^3 - 4\alpha x + 4 \\ g^2 = (x^2 + 2x + 2)^2 = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4 \end{cases}$
 o que é impossível, pois f não tem termo em x^2 .

- 147.** a) $P(10) = A = \alpha\beta\gamma = 100\alpha + 10\beta + \gamma = 10^2\alpha + 10^1\beta + 10^0\gamma$.
 Então: $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
 b) $A = \alpha\beta\gamma = 100\alpha + 10\beta + \gamma =$
 $= (99 + 1)\alpha + (9 + 1)\beta + \gamma =$
 $= 99\alpha + 9\beta + (\alpha + \beta + \gamma)$
 Portanto, A é divisível por 3 se, e somente se, $\alpha + \beta + \gamma$ é múltiplo de 3.

- 149.** $f(x) = ax^2 + bx + c$
 $f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$ (1)
 $f(x) = f(x - 1), \forall x \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c, \forall x$
 Então $ax^2 + bx + c = ax^2 + (b - 2a)x + (a - b + c), \forall x$
 e daí vem $b = b - 2a$ (2) e $c = a - b + c$ (3).
 De (2) vem $a = 0$, e o problema é impossível porque f deveria ser do 2º grau.

- 150.** $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
 $P(-x) = a(-x)^3 + b(-x)^2 + c(-x) + d = -ax^3 + bx^2 - cx + d$
 $P(x) = P(-x) \Rightarrow a = -a \Rightarrow a = 0$
 Então $P(x)$ não é do 3º grau e, portanto, nenhum polinômio tem a propriedade desejada.

- 151.** $a_0 = -1$
 $a_1 = 1 + i \cdot a_0 = 1 + i(-1) = 1 - i$
 $a_2 = 1 + i \cdot a_1 = 1 + i(1 - i) = 2 + i$
 $a_3 = 1 + i \cdot a_2 = 1 + i(2 + i) = 2i$
 $a_4 = 1 + i \cdot a_3 = 1 + i(2i) = -1 = a_0$
 Os coeficientes formam uma sequência cíclica
 $(1, 1 - i, 2 + i, 2i, -1, 1 - i, 2 + i, 2i, \dots)$, então:
 $a_{30} = a_{26} = a_{22} = \dots = a_2 = 2 + i$.

- 152.** a) $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
 $P(x - 1) = a(x - 1)^3 + b(x - 1)^2 + c(x - 1) + d =$
 $= ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 2b + 3a)x + (-a + b - c + d)$
 Impondo $P(x) - P(x - 1) = x^2, \forall x$, vem
 $3ax^2 - (2b - 3a)x + (a - b + c) = x^2, \forall x$
 e daí:
 $3a = 1, -2b + 3a = 0$ e $a - b + c = 0$
 de onde vem $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}$ e $c = \frac{1}{6}$.
 Conclusão: $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + d$.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } S &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \\
 &= [P(1) - P(0)] + [P(2) - P(1)] + [P(3) - P(2)] + \dots + [P(n) - P(n-1)] = \\
 &= P(n) - P(0) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + d - d = \\
 &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

154. Sejam q o quociente e r o resto da divisão de f por g , tais que $\delta g = 4$ e $\delta q = 2$. Temos:

$$\left. \begin{aligned}
 &\bullet \quad qg + r = f \Rightarrow \delta(qg + r) = \delta f \\
 &\bullet \quad \delta r < \delta g
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta f = \delta q + \delta g$$

$$\text{a) } \delta r = 1 \Rightarrow \delta f = 2 + 4 = 6$$

$$\text{b) } \delta r = 2 \Rightarrow \delta f = 2 + 4 = 6.$$

Portanto: $\delta f = 6$ nos dois casos.

155. $\delta P(x) = m$, $\delta S(x) = n$, $n < m$, $\delta R(x) = p$. Então:

$$\delta R(x) < \delta S(x) = n \Rightarrow \delta R(x) \leq n - 1.$$

Portanto: $0 \leq p \leq n - 1$.

156. Sejam Q o quociente e R o resto da divisão de P por B , tais que $\delta P = p$ e $\delta Q = q$.

$$\text{Então: } \delta B = \delta P - \delta Q = p - q \text{ e } \delta R < \delta B = p - q.$$

Portanto: $\delta R \leq p - q - 1$.

161. $f = x^4 - 3ax^3 + (2a - b)x^2 + 2bx + (a + 3b)$

$$g = x^2 - 3x + 4$$

$$\delta q = \delta f - \delta g = 2 \Rightarrow q = mx^2 + nx + s$$

$$r = 0$$

$$f = qg = (mx^2 + nx + s)(x^2 - 3x + 4)$$

$$= mx^4 + (n - 3m)x^3 + (4m - 3n + s)x^2 + (4n - 3s)x + 4s$$

$$\text{Então: } m = 1, n - 3m = -3a, 4m - 3n + s = 2a - b, 4n - 3s = 2b \text{ e}$$

$$4s = a + 3b.$$

$$\text{Resolvendo o sistema, temos: } a = \frac{1}{34} \text{ e } b = \frac{93}{34}.$$

162. $\delta Q = \delta F - \delta G = 4 - 2 = 2 \Rightarrow Q = ax^2 + bx + c$

$$R = 0$$

$$F = QG = (ax^2 + bx + c)(x^2 + px + q)$$

$$x^4 + 1 = ax^4 + (ap + b)x^3 + (aq + bp + c)x^2 + (bq + cp)x + qc$$

$$\text{Então: } a = 1, ap + b = 0, aq + bp + c = 0, bq + cp = 0 \text{ e } qc = 1.$$

Resolvendo o sistema, temos: $q = 1$ e $p = \pm\sqrt{2}$.

163. $\delta Q = \delta P_1 - \delta P_2 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow Q(x) = ax + b$

$$R = 0$$

$$P_1(x) = Q(x) \cdot P_2(x) = (ax + b)(x^2 - x + 1)$$

$$x^3 + px^2 - qx + 3 = ax^3 + (b - a)x^2 + (a - b)x + b$$

Então: $a = 1$, $b - a = p$, $a - b = -q$ e $b = 3$.
Resolvendo o sistema, temos: $p = q = 2$.

164. $\delta Q = \delta F - \delta G = 3 - 2 = 1 \Rightarrow Q(x) = ax + b$
 $R = 0$
 $F(x) = Q(x) \cdot G(x) = (ax + b)(x^2 + 2x + 5)$
 $x^3 + px + q = ax^3 + (2a + b)x^2 + (5a + 2b)x + 5b$
 Então: $a = 1$, $2a + b = 0$, $5a + 2b = p$ e $5b = q$.
 Resolvendo o sistema, temos: $p = 1$ e $q = -10$.

168. $\delta F(x) = \delta A(x) - \delta B(x) = 1 \Rightarrow F(x) = ax + b$
 $R = 0$
 $A(x) = B(x) \cdot F(x) = (ax + b)(-x^2 + 5x - 6)$
 $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = -ax^3 + (5a - b)x^2 + (5b - 6a)x = 6b$
Então: $-a = 1$, $5a - b = -2$, $5b - 6a = -9$ e $-6b = 18$.
Resolvendo o sistema, temos: $a = -1$ e $b = -3$ e portanto:
 $F(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = ax + b = -x - 3$.

169. Pelo método da chave, temos:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 - 8x & x^2 - 4 \\ -2x^3 & + 8x \\ \hline & x^2 \\ & -x^2 & + 4 \\ \hline & & 4 \end{array}$$

$$\text{Então: } \frac{p(x)}{q(x)} = 2x + 1 + \frac{4}{x^2 - 4}.$$

170. Como $\delta P \geq 3$, a igualdade é impossível porque o 1º membro tem grau maior que o 2º.
 $\delta P < 3 \Rightarrow P(x) = ax^2 + bx + c$. Temos, então:
 $(3x + 2)P(x) = 3x^3 + x^2 - 6x - 2 + P(x) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3ax^3 + (3b + 2a)x^2 + (3c + 2b)x + 2c = 3x^3 + (a + 1)x^2 + (b - 6)x + c - 2$.
 Então: $3a = 3$, $3b + 2a = a + 1$, $3c + 2b = b - 6$ e $2c = c - 2$.
 Resolvendo o sistema, temos: $a = 1$, $b = 0$ e $c = -2$ e, portanto,
 $P(x) = x^2 + 0 \cdot x - 2 = x^2 - 2 = B(x)$.

171. $\delta q = 2 \Rightarrow q = ax^2 + bx + c$ e $r = 0$. Temos:
 $2x^4 + 3x^3 + mx^2 - nx - 3 = (ax^2 + bx + c)(x^2 - 2x - 3) =$
 $= ax^4 + (b - 2a)x^3 + (c - 3a - 2b)x^2 + (-3b - 2c)x - 3c$
 Então: $a = 2, b - 2a = 3, c - 3a - 2b = m, -3b - 2c = -n$ e $-3c = -3$.
 Resolvendo o sistema, temos: $m = -19$ e $n = 23$.

$$\begin{array}{r}
 172. \quad a) \quad \begin{array}{r} 2x^3 \qquad \qquad + Ax \qquad + 3B \\ -2x^3 + 6x^2 \quad - 18x \\ \hline 6x^2 + (A - 18)x + 3B \\ - 6x^2 \qquad \quad 18x - 54 \\ \hline Ax + 3B - 54 \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} x^2 - 3x + 9 \\ 2x + 6 \end{array}
 \end{array}$$

Então, temos: quociente = $2x + 6$

resto = $Ax + 3B - 54$.

b) Para que a divisão seja exata, devemos ter resto nulo.

Então:

$$r = Ax + 3B - 54 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 18 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r}
 173. \quad \begin{array}{r} 1 \qquad \qquad a \qquad \qquad b \qquad \qquad 20 \\ -1 \qquad \qquad 5 \qquad \qquad -4 \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} 1 - 5 \ 4 \\ 1 \ a + 5 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} a + 5 \qquad \qquad b - 4 \qquad \qquad 20 \\ -(a + 5) \qquad 5a + 25 \qquad -4a - 20 \\ \hline b + 5a + 21 \qquad -4a \end{array}
 \end{array}$$

Então:

$$-4a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$b + 5a + 21 = 0 \Rightarrow b = -21 \text{ e, portanto:}$$

$$a + b = -21.$$

$$\begin{array}{r}
 175. \quad \begin{array}{r} 4 \quad -3 \quad m \quad 1 \\ -4 \quad 2 \quad -2 \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} 2 \quad -1 \quad 1 \\ 2 \quad -\frac{1}{2} \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} -1 \quad m - 2 \quad 1 \\ 1 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\ \hline m - \frac{5}{2} \quad \frac{3}{2} \end{array}
 \end{array}$$

Então, o resto da divisão de $P_1(x)$ por $P_2(x)$ independe de x se, e somente se, $m - \frac{5}{2} = 0$ ou $m = \frac{5}{2}$.

177. Temos inicialmente:

$$A = QB + R \quad (1) \text{ e } \delta R < \delta B \quad (2)$$

Sejam Q_1 o quociente e R_1 o resto da divisão de A por $2B$.

$$A = Q_1(2B) + R_1 \quad (3) \text{ e } \delta R_1 < \delta(2B) \quad (4)$$

De (1) e (2), temos:

$$A = \left(\frac{1}{2}Q\right)(2B) + R \text{ e } \delta R < \delta B = \delta(2B)$$

Portanto, $\frac{1}{2}Q$ e R satisfazem as condições para serem quociente e resto, respectivamente, da divisão de A por $2B$.

Então, devido à unicidade do quociente e do resto, devemos ter:

$$Q_1 = \frac{1}{2}Q \text{ e } R_1 = R.$$

- 178.** Se $x^3 + px + q$ é divisível por $x^2 + ax + b$ e $x^2 + rx + s$, então:
 $x^3 + px + q = (x^2 + ax + b)(mx + n) = mx^3 + (am + n)x^2 + (bm + an)x + bn$,
 $x^3 + px + q = (x^2 + rx + s)(m'x + n') + m'x^3 + (rm' + n')x^2 + (sm' + m'n)x + sn$

Temos, então:

$$\begin{cases} m = 1 \\ am + n = 0 \Rightarrow a = -n \\ bm + an = p \end{cases} \Rightarrow p = b - a^2 \quad (1)$$

$$bn = q \Rightarrow q = -ab \quad (2)$$

$$\begin{cases} m' = 1 \\ rm' + n' = 0 \Rightarrow r = -n' \\ sm' + rn' = p \end{cases} \Rightarrow p = b - a^2 \quad (3)$$

$$sn' = q \Rightarrow q = -sr \quad (4)$$

$$\text{de (2) e (4)} \Rightarrow s = \frac{ab}{r} \quad (5)$$

$$\text{de (1) e (3)} \Rightarrow b - a^2 = s - r^2 \stackrel{(5)}{=} \frac{ab}{r} - r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(b - a^2) = ab - r^3 \Rightarrow rb - ab = ra^2 - r^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{r(a^2 - r^2)}{r - a} = -\frac{r(a + r)(a - r)}{a - r} = -r(a + r)$$

- 179.** f é um cubo perfeito se existir um polinômio $mx + n$ tal que $(mx + n)^3 = f$.
 Impondo essa igualdade, temos:

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = m^3x^3 + 3m^2nx^2 + 3mn^2x + n^3$$

$$\text{e daí vem } a = m^3, b = m^2n, c = mn^2 \text{ e } d = n^3$$

e este sistema dá como solução $m = \sqrt[3]{a}$ e $n = \sqrt[3]{d}$. Esta solução só satisfaz as quatro equações se:

$$b = m^2n = \sqrt[3]{a^2d} \text{ e } c = mn^2 = \sqrt[3]{ad^2}, \text{ ou seja, } b^3 = a^2d \text{ e } c^3 = ad^2.$$

- 181.** Sejam q_1 e q_2 os quocientes das divisões, respectivamente, de f por h

$$\text{e de } g \text{ por } h: \begin{cases} f = q_1 \cdot h \\ g = q_2 \cdot h \end{cases}$$

Sejam q o quociente e r o resto da divisão de:

$$a) f + g \text{ por } h: f + g = qh + r. \text{ Temos: } r = f + g - q \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = q_1 \cdot h + q_2 \cdot h - q \cdot h = (q_1 + q_2 - q)h. \text{ Portanto, } f + g \text{ é divisível por } h.$$

$$b) f - g \text{ por } h: f - g = qh + r \Rightarrow r = f - g - qh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = q_1h - q_2h - qh = (q_1 - q_2 - q)h. \text{ Portanto, } f - g \text{ é divisível por } h.$$

c) $f \cdot g$ por h : $fg = qh + r \Rightarrow r = fg - qh \Rightarrow$
 $\Rightarrow r = (q_1h)(q_2h) - qh = (q_1 \cdot q_2h - q)h$.
 Portanto, $f \cdot g$ é divisível por h .

189. Sejam $f = 4x^n + 3x^{n-2} + 1$ e $g = x + 1$.

a) n par $\Rightarrow r = f(-1) = 4(-1)^n + 3(-1)^{n-2} + 1 = 8$

b) n ímpar $\Rightarrow r = f(-1) = 4(-1)^n + 3(-1)^{n-2} + 1 = -4 - 3 + 1 = -6$

Portanto: se n par, $r = 8$; se n ímpar, $n = -6$.

190. Para que $P(x)$ seja divisível por $x + a$, é necessário que o resto r da divisão seja 0, mas $r = P(-a)$; então deve-se ter $P(-a) = 0$. Conclusão: $-a$ deve ser raiz de $P(x)$.

197. Seja $f = ax^3 - 2x + 1$; $f(3) = 4 \Rightarrow 27a - 5 = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$.

198.

5	0	a	b	3	1	2
5	10	$a + 20$	$2a + b + 40$	$4a + 2b + 83$	$8a + 4b + 167$	r

$q = 5x^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 115$, então:

$4a + 2b + 83 = 115 \Rightarrow 4a + 2b = 32$ e

$r = 8a + 4b + 167 = 64 + 167 = 231$

199.

2	8	-1	0	16	-4
	-8	b	4	e	
2	a	c	d	f	

A terceira linha é a soma das duas primeiras; então:

$8 + (-8) = a$, $(-1) + b = c$, $0 + 4 = d$, $16 + e = f$.

A segunda linha é obtida multiplicando os elementos 2, a , c , d (da terceira linha) por -4 , então:

$a \cdot (-4) = b$, $c \cdot (-4) = 4$ e $d \cdot (-4) = e$.

Dessas sete condições resulta:

$a = 0$, $b = 0 \cdot (-4) = 0$, $c = \frac{4}{-4} = -1$, $d = 4$, $e = 4 \cdot (-4) = -16$ e

$f = 16 + (-16) = 0$.

$a + b + c + d + e + f = -13$

200. $P(x)$ é um determinante de Vandermonde. Então,

$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$. O resto da divisão de $P(x)$ por $x - b$ é $r = P(b) = 0$.

201. $P(x) = x^3 - 0,52x - 1,626$ e $P(1) = -1,146$

$D(x) = x - 1,32$ e $D(1) = -0,32$. Portanto:

$P(1) + D(1) = -1,146 - 0,32 = -1,466$.

- 202.** $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_n \cdot x^n$ e $a_0, a_1, \dots, a_n$ formam, nessa ordem, uma P.G. de razão $\frac{1}{2}$. Então:

$$P(x) = a_0 + a_0 \cdot \frac{1}{2}x + a_0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \dots + a_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot x^n$$

$$= a_0 \left[1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{2}\right)^n \right]$$

$$r = P(-2) = a_0 \left[1 + \frac{-2}{2} + \left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{-2}{2}\right)^n \right]$$

$$= a_0[1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1] = a_0 \cdot 0 = 0.$$

- 204.** $f = ax^2 + bx + c$

- $a = 1 \Rightarrow f = x^2 + bx + c$

- f é divisível por $x - 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow 1 + b + c = 0$ (1)

- Os restos das divisões de f por $x - 2$ e $x - 3$ são iguais:

$$f(2) = f(3) \Rightarrow 4 + 2b + c = 9 + 3b + c. \quad (2)$$

Resolvendo (1) e (2), temos: $b = -5$ e $c = 4$. Portanto, $f = x^2 - 5x + 4$.

- 205.** • f é polinômio do 3º grau $\Rightarrow f = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

- f se anula para $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c + d = 0$. (1)

- f dividido por $x + 1$, $x - 2$ e $x + 2$ dá restos iguais a 6 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(-1) = 6 \Rightarrow -a + b - c + d = 6 \quad (2)$$

$$f(2) = 6 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 6 \quad (3)$$

$$f(-2) = 6 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 6. \quad (4)$$

Resolvendo o sistema das quatro equações, temos: $a = b = 1$; $c = -4$ e $d = 2$.

Portanto, $f = x^3 + x^2 - 4x + 2$.

- 214.** $f(1) = f(2) = f(-3) = 0 \Rightarrow f$ é divisível por $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$.
Portanto, $r = 0$.

- 215.** Seja $f = qg + r$; $g = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$; $f(-1) = 5$; $f(1) = f(2) = -1$.

$$\delta r < \delta g = 3 \Rightarrow r = ax^2 + bx + c$$

$$f = (x + 1)(x - 1)(x - 2) \cdot q(x) + (ax^2 + bx + c), \text{ então:}$$

$$f(-1) = 5 \Rightarrow a - b + c = 5$$

$$f(1) = -1 \Rightarrow a + b + c = -1$$

$$f(2) = -1 \Rightarrow 4a + 2b + c = -1.$$

Resolvendo o sistema, temos: $a = c = 1$ e $b = -3$.

Portanto, $r = x^2 - 3x + 1$.

- 216.** $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$P(-1) = 0 \Rightarrow -a + b - c + d = 0$$

$$P(1) = 10 \Rightarrow a + b + c + d = 10$$

$$P(-2) = 10 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 10$$

$$P(-3) = 10 \Rightarrow -27a + 9b - 3c + d = 10$$

Resolvendo o sistema, temos: $a = c = \frac{5}{2}$, $b = 10$, $d = -5$.

Portanto: $P(x) = \frac{5}{2} \cdot x^3 + 10x^2 + \frac{5}{2} \cdot x - 5$ e o coeficiente de x^3 é $\frac{5}{2}$.

- 217.** $f = x^3 - 2ax^2 + (3a + b)x - 3b$, $g = x^3 - (a + 2b)x + 2a$;
 $f(-1) = 0 \Rightarrow -1 - 5a - 4b = 0$
 $g(-1) = 0 \Rightarrow -1 + 3a + 2b = 0$
 Resolvendo o sistema, temos: $a = 3$ e $b = -4$.

- 218.** $f = x^p + 2a^q x^{p-q} + a^p$ com $p, q \in \mathbb{N}$ e $p > q$
 $f(-a) = (-a)^p + 2 \cdot a^q \cdot (-a)^{p-q} + a^p$
 Se p e q são ímpares, temos:
 $f(-a) = -a^p + 2 \cdot a^q \cdot a^{p-q} + a^p = 2a^p$.
 Se p e q são pares, temos:
 $f(-a) = a^p + 2 \cdot a^q \cdot a^{p-q} + a^p = 4a^p$.
 Se q é par e p é ímpar, temos:
 $f(-a) = -a^p - 2 \cdot a^q \cdot a^{p-q} + a^p = -2a^p$.
 Se p é par e q é ímpar, temos:
 $f(-a) = a^p - 2 \cdot a^q \cdot a^{p-q} + a^p = 0$ (independente de a).
 Portanto, p par e q ímpar é a solução.

- 228.** $P(x) = x^{999} - 1$; $P(1) = 1^{999} - 1 = 0 \Rightarrow R(x) = 0$

$$\begin{array}{ccccccc|c|c}
 & & & \overbrace{998 \text{ zeros}} & & & & & & \\
 1 & 0 & 0 & & 0 & & -1 & 1 \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & & 1 & & 0 &
 \end{array}$$

$Q(x) = x^{998} + x^{997} + \dots + x + 1$ e $Q(0) = 1$

Portanto: $R(x) = 0$ e $Q(0) = 1$.

- 229.** Aplicando duas vezes Briot:

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & 0 & a & b & 1 \\
 \hline
 1 & 1 & a+1 & a+b+1=r_1 & 1 \\
 \hline
 1 & 2 & a+3=r_2 & &
 \end{array}$$

Impondo $r_1 = 0$ e $r_2 = 0$, vem:

$$a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$a + b + 1 = 0 \Rightarrow b = 2.$$

- 230.** $P(2) = 13$, $P(-2) = 5$ e $P(x) = (x^2 - 4) \cdot Q(x) + R(x)$.
 Temos: $R(x) = ax + b$.
 $P(2) = (2^2 - 4)Q(2) + 2a + b \Rightarrow 2a + b = 13$
 $P(-2) = [(-2)^2 - 4]Q(-2) - 2a + b \Rightarrow -2a + b = 5$

E, resolvendo o sistema: $a = 2$; $b = 9$; $R(x) = 2x + 9$.
Portanto: $R(1) = 11$.

- 231.** O quociente $Q(x)$ da divisão de $P(x)$ por $(x - 2)^3$ tem grau $\delta Q = 4 - 3 = 1$; portanto, $Q(x) = ax + b$.

Temos:

$$P(x) = (x - 2)^3(ax + b)$$

$$P(0) = -8 \Rightarrow -8(a \cdot 0 + b) = -8 \Rightarrow b = 1$$

$$P(1) = -3 \Rightarrow -1(a \cdot 1 + b) = -3 \Rightarrow a + b = 3 \Rightarrow a = 2$$

Então:

$$P(x) = (x - 2)^3(2x + 1) \text{ e } P(3) = (3 - 2)^3(2 \cdot 3 + 1) = 7$$

- 232.** Seja $f = x^{2n} - a^{2n}$ e $g = x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$.

Então:

$$f(a) = a^{2n} - a^{2n} = 0$$

$$f(-a) = (-a)^{2n} - (-a)^{2n} = a^{2n} - a^{2n} = 0.$$

Portanto: $x^{2n} - a^{2n}$ é divisível por $x^2 - a^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

234.

6	11	4	K	2	8	$-\frac{4}{3}$
6	3	0	K	$2 - \frac{4K}{3}$	$\frac{16K}{9} + \frac{16}{3}$	

$$r = 0 \Rightarrow \frac{16K}{9} + \frac{16}{3} = 0 \Rightarrow K = -3.$$

- 238.** Seja $Q(x)$ o quociente da divisão de $P(x)$ por $ax - b$. Se $P(r) = R$, temos:

$$P(x) = Q(x)(ax - b) + R$$

$$P(r) = Q(r)(ar - b) + R \Rightarrow ar - b = 0 \Rightarrow r = \frac{b}{a}.$$

- 242.** $f(x) = x^4 + 4^3 + 4x^2 - x - 2$ e $g(x) = x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$.

$$f(-1) = 1 - 4 + 4 + 1 - 2 = 0$$

$$f(-2) = 16 - 32 + 16 + 2 - 2 = 0$$

Então $f(x)$ é divisível por $x + 1$ e $x + 2$, portanto é divisível por $g(x)$.

- 243.** $f(x) = (x - 2)^{2n} + (x - 1)^n - 1$ e $g(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.
Se $f(x)$ é divisível por $x - 1$ e $x - 2$, $f(x)$ será divisível por $g(x)$.

Temos:

$$f(1) = [(1 - 2)^2]^n + (1 - 1)^n - 1 = 1^n + 0 - 1 = 0$$

$$f(2) = (2 - 2)^{2n} + (2 - 1)^n - 1 = 0 + 1^n - 1 = 0$$

Portanto: $(x - 2)^{2n} + (x - 1)^n - 1$ é divisível por $x^2 - 3x + 2$.

- 245.** $f = x^3 + px + q$ é divisível por $g = (x - 2)(x + 1)$, se f for divisível por $x - 2$ e $x + 1$, isto é, $f(2) = 0$ e $f(-1) = 0$.

Então:

$$f(2) = 0 \Rightarrow f(2) = 8 + 2p + q \Rightarrow 2p + q = -8$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow f(-1) = -1 - p + q \Rightarrow -p + q = 1.$$

Resolvendo o sistema, temos: $p = -3$ e $q = -2$.

- 246.** Sejam $f = ax^{2n} + bx^{2n-1} + c$ ($n \in \mathbb{N}^*$) e $g = x(x + 1)(x - 1)$. f é divisível por g se f é divisível por $(x - 0)$, $(x + 1)$ e $(x - 1)$, isto é:

$$f(0) = c = 0$$

$$f(-1) = a - b + c = 0$$

$$f(1) = a + b + c = 0$$

Resolvendo o sistema de equações, temos: $a = b = c = 0$.

- 247.** Sejam $f = 5x^6 - 6x^5 + 1$ e $g = (x - 1)^2$. Aplicando o algoritmo de Briot:

5	-6	0	0	0	0	1	1
5	-1	-1	-1	-1	-1	$0 = r_1$	1
5	4	3	2	1	$0 = r_2$		

Temos, então: $r_1 = r_2 = 0$ e, portanto, f é divisível por g e $q = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

- 248.** Sejam $f = nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$ e $g = (x - 1)^2$. Aplicando Briot:

n	-n-1	0 0 0 ... 0				1	1
n	-1	-1	-1	-1	-1	0	1
n	n-1	n-2	n-3	n-4	... 1	0	

Temos: $r_1 = r_2 = 0$ e, portanto, f é divisível por g .

- 249.** Sejam $f = ax^{n+1} + bx^n + 1$ e $g = (x - 1)^2$. Aplicando Briot:

a	b	0 0 ... 0				1	1
a	a+b	a+b	a+b	a+b	a+b	$a+b+1$	1
a	$2a+b$	$3a+2b$	$4a+3b$	...	$a(n+1)+bn$		

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ a(n + 1) + bn = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ a(n + 1) + bn = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos: $\begin{cases} a = n \\ b = -n - 1 \end{cases}$

250. $f(x) = x^5 - ax^4 + bx^3 - bx^2 + 2x - 1$

• Para que $f(x)$ seja divisível por $x - 1$, devemos ter:

$$f(1) = 1 - a + b - b + 2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 2$$

Para $a = 2$, temos $f(x) = x^5 - 2x^4 + bx^3 - bx^2 + 2x - 1$.

Vamos dividir $f(x)$ por $x - 1$ aplicando Briot:

1	-2	b	-b	2	-1	1
1	-1	b - 1	-1	1	0	

então $f(x) = (x - 1)(x^4 - x^3 + \underbrace{(b - 1)x^2 - x + 1}_{q_1(x)})$.

• Para que $q_1(x)$ seja divisível por $x - 1$, devemos ter:

$$q_1(1) = 1 - 1 + (b - 1) - 1 + 1 = 0 \Rightarrow b = 1$$

Para $b = 1$, temos $f(x) = (x - 1)(x^4 - x^3 - x + 1)$.

Vamos dividir $q_1(x)$ por $x - 1$ aplicando Briot:

1	-1	0	-1	1	1
1	0	0	-1	0	

então $q_1(x) = (x - 1)(x^3 - 1) = (x - 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$.

• Finalmente: $f(x) = (x - 1) \cdot q_1(x) = (x - 1)^3(x^2 + x + 1)$, então $f(x)$ é divisível por $(x - 1)^3$ e, como $x^2 + x + 1$ não é divisível por $x - 1$, vem $m = 3$.

255. Seja $P(x) = Q(x)(x + 1)(x - 2) + R(x)$, com $R(x) = ax + b$.

• $P(-1) = 3 \Rightarrow R(-1) = 3 \Rightarrow a + b = 3$

• $P(2) = 3 \Rightarrow R(2) = 3 \Rightarrow 2a + b = 3$

Resolvendo o sistema, vem $a = 0$ e $b = 3$; portanto, $R(x) = 3$.

256. a) Dados os polinômios

$$A(z) = a_m z^m + a_{m-1} \cdot z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (a_m \neq 0) \text{ e}$$

$$B(z) = b_n z^n + b_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0 \quad (b_n \neq 0),$$

existem um único polinômio $Q(z)$ e um único polinômio $R(z)$ tais que $Q(z) \cdot B(z) + R(z) = A(z)$ e $\delta R(z) < \delta B(z)$ (ou $R(z) = 0$).

b) $A(z) = Q(z) \cdot B(z) + R(z) = Q(z)(z^2 + 1) + R(z)$

$$\delta R(z) < \delta B(z) = 2 \Rightarrow R(z) = az + b$$

Temos:

$$A(i) = Q(i)(i^2 + 1) + R(i) = Q(i)(-1 + 1) + ai + b = ai + b \quad (1)$$

$$A(-i) = Q(-i)[(-i)^2 + 1] + R(-i) = Q(-i)(-1 + 1) - ai + b = -ai + b \quad (2)$$

Resolvendo o sistema de equações (1) e (2), temos:

$$b = \frac{A(i) + A(-i)}{2} \text{ e } a = \frac{A(-i) - A(i)}{2} \cdot i$$

$$\text{e, portanto: } R(z) = \frac{A(i) + A(-i)}{2} + \frac{A(-i) - A(i)}{2} \cdot iz.$$

257. Sejam q o quociente e r o resto da divisão de f por $g = (x + 2)(x^2 + 4) = (x + 2)(x + 2i)(x - 2i)$. Temos, então:

$$\delta r < \delta q = 3 \Rightarrow r = ax^2 + bx + c$$

$$f = qg + r = q \cdot (x + 2)(x + 2i)(x - 2i) + (ax^2 + bx + c)$$

$$f(-2) = 0 \Rightarrow 4a - 2b + c = 0$$

$$f(2i) = 2i + 1 \Rightarrow -4a + c + 2bi = 2i + 1$$

$$f(-2i) = -2i + 1 \Rightarrow -4a + c - 2bi = -2i + 1$$

Resolvendo o sistema de equações, temos: $a = \frac{1}{8}$, $b = 1$ e $c = \frac{3}{2}$;

$$\text{portanto: } r = \frac{1}{8}x^2 + x + \frac{3}{2}.$$

258. $P(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 1) + R(x)$

$$\delta R < 2 \Rightarrow R(x) = ax + b$$

$$R(2) = 9 \Rightarrow P(2) = 2a + b = 9 \quad (1)$$

$$P(-1) = 0 \Rightarrow P(-1) = -a + b = 6 \quad (2)$$

(1) e (2) $\Rightarrow a = 1$ e $b = 7$ e $R(x) = x + 7$, e, portanto,

$$P(x) = x^4 - 3x^2 + x + 3.$$

CAPÍTULO III — Equações polinomiais

263.

2	-6	4	0	0	1
2	-4	0	0	0	

$$q_1 = 2x^3 - 4x^2 = 2x^2(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

Como x_4 é a maior das raízes, então $x_4 = 2$ e $5x_4^3 = 40$.

266. Se a e b são raízes do polinômio $P(x)$, então pelo teorema da decomposição temos:

$$P(x) = a_n(x - a)(x - b)(x - r_1) \dots (x - r_m), a_n \neq 0$$

e, portanto, $\delta P(x) \geq 2$.

274.

Sendo $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 7x - 10$, notamos que

$$f(1) = -1 + 4 + 7 - 10 = 0.$$

Então $f(x)$ é divisível por $x - 1$. Efetuada a divisão, obtemos:

$$f(x) = (x - 1)(-x^2 + 3x + 10).$$

As raízes da equação $-x^2 + 3x + 10 = 0$ são -2 e 5 , então $-x^2 + 3x + 10 = -(x + 2)(x - 5)$.

Finalmente: $f(x) = -(x - 1)(x + 2)(x - 5) = (1 - x)(x + 2)(x - 5)$.

275. a) $6x^2 - 5xy + y^2 = 6x^2 - 3xy - 2xy + y^2 = 3x(2x - y) - y(2x - y) = (2x - y)(3x - y)$

b) $x^4 + 4 = (x^2 + 2i)(x^2 - 2i)$

As raízes da equação binômica $x^2 + 2i = 0$ são $1 - i$ e $-1 + i$, portanto: $x^2 + 2i = (x - 1 + i)(x + 1 - i)$.

As raízes da equação binômica $x^2 - 2i = 0$ são $1 + i$ e $-1 - i$, portanto: $x^2 - 2i = (x - 1 - i)(x + 1 + i)$.

Temos, então:

$$x^4 + 4 = (x - 1 + i)(x + 1 - i)(x - 1 - i)(x + 1 + i).$$

276. Se $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ é divisível por

$$g_1(x) = -2x^2 + \sqrt{5}x = -2x\left(x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \text{ e por}$$

$b_2(x) = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$, então $p(x)$ admite como raízes os números $0, \frac{\sqrt{5}}{2}, -1$ e 2 .

A forma fatorada de $p(x)$ será:

$$p(x) = a(x - 0)\left(x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)(x + 1)(x - 2)(x - r).$$

Supondo que todos os coeficientes de $p(x)$ sejam reais, então r também é real, pois $x - r$ é o quociente de $p(x)$ por

$$a(x - 0)\left(x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)(x + 1)(x - 2).$$

Conclusão: $p(x)$ tem 5 raízes reais.

277. Seja $B = A - xI$. Temos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det B = -x^3 + 3x^2 = -x^2(x - 3). \text{ Portanto: } S = \{0, 3\}.$$

278. Todas as afirmações são verdadeiras.

a) Ver item 39.

b) Ver item 41.

c) Ver item 87.

286. Aplicando Briot:

1	-4	8	-16	16	2
1	-2	4	-8	0	2
1	0	4	0		

Temos $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16 = (x - 2)^2(x^2 + 4)$.

Recaímos em $x^2 + 4 = 0$, cujas raízes são $x = 2i$ ou $x = -2i$.

Portanto: $S = \{2, 2i, -2i\}$.

289. Aplicando Briot sucessivas vezes:

1	-1	-3	5	-2	1
1	0	-3	2	0	1
1	1	-2	0		1
1	2	0			1
1	3 ≠ 0				

Então, $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^3(x + 2)$. Portanto, 1 é raiz tripla. Portanto a multiplicidade é 3.

290. Vamos dividir $P(x)$ por $x - 1$ utilizando Briot:

-1	-1	1	1	1
-1	-2	-1	0	

Resulta $P(x) = (x - 1)(-x^2 - 2x - 1)$.

Resolvendo $-x^2 - 2x - 1$, temos $x_1 = x_2 = -1$ e daí $x_1 \cdot x_2 = 1$.

291. $x^4 - 20x^2 + 36 = (x^2 - 2)(x^2 - 18)$
 $= (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + 3\sqrt{2})(x - 3\sqrt{2})$

Então as raízes $-3\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ formam, nessa ordem, uma P.A. de razão $2\sqrt{2}$. Portanto, a proposição correta é c.

292. $x = 2$ é raiz dupla de $P(x) = -x^4 + 11x^3 - 38x^2 + 52x - 245$. Aplicando Briot:

-1	11	-38	52	-24	2
-1	9	-20	12	0	2
-1	7	-6	0		

Recaímos em $-x^2 + 7x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 6$.

Como $f(x) = \log [P(x)] \Rightarrow P(x) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -(x - 2)^2(x - 1)(x - 6) > 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 6) < 0$ e $x \neq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 < x < 2$ ou $2 < x < 6$ e, portanto,

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 6, x \neq 2\}$.

293. $x = -2$ é raiz dupla de $2x^3 + 7x^2 + 4x + K = 0$. Aplicando Briot:

2	7	4	K	-2
2	3	-2	$K + 4$	-2
2	-1	0	$\underbrace{K + 4}_{r_1}$	

$r_1 = 0 \Rightarrow K + 4 = 0 \Rightarrow K = -4$

Portanto: $K = -4$.

- 294.** Zero é raiz dupla de $x^4 + (3a - b)x^3 + (2b - 4)x^2 + (ab + 4)x + a + b = 0$.
Aplicando Briot:

1	3a - b	2b - 4	ab + 4	a + b	0
1	3a - b	2b - 4	ab + 4	a + b	0
1	3a - b	2b - 4	$\underbrace{ab + 4}_{r_2}$	$\underbrace{a + b}_{r_1}$	

$$r_1 = r_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ ab + 4 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos: $a = 2$ e $b = -2$.

- 295.** A equação admite duas, e apenas duas, raízes nulas. Aplicando Briot:

1	-5	4	-3	2	m - 5n	$\frac{3}{5}m - n + 2$	5 - m · n	0
1	-5	4	-3	2	m - 5n	$\frac{3}{5}m - n + 2$	5 - m · n	0
1	-5	4	-3	2	m - 5n	$\frac{3}{5}m - n + 2$	$\underbrace{5 - m \cdot n}_{r_1}$	

$$r_1 = r_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5 - m \cdot n = 0 \\ \frac{3}{5}m - n + 2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos: $m = -5$ e $n = -1$ ou $m = \frac{5}{3}$ e $n = 3$.

Se $m = -5$ e $n = -1$, a equação admite mais que duas raízes nulas.

Portanto: $m = \frac{5}{3}$ e $n = 3$.

- 296.** Zero é raiz de multiplicidade 3 da equação. Aplicando Briot:

1	-3	4	$12b + \frac{a}{3}$	a - 3b + 13	ab + 4	0
1	-3	4	$12b + \frac{a}{3}$	a - 3b + 13	ab + 4	0
1	-3	4	$12b + \frac{a}{3}$	a - 3b + 13	$\underbrace{ab + 4}_{r_1}$	0
1	-3	4	$\underbrace{12b + \frac{a}{3}}_{r_3}$	$\underbrace{a - 3b + 13}_{r_2}$		

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} ab = -4 \\ a - 3b + 13 = 0 \\ 12b + \frac{a}{3} = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos: $a = -12$; $b = \frac{1}{3}$ e, portanto:
 $a + b = -\frac{35}{3}$.

297. 2 é raiz dupla. Aplicando Briot:

1	$-4 - m$	$4 + 4m$	$-4m$	2
1	$-2 - m$	$2m$	0	2
1	$-m$	0		2
1	$2 - m$			

Então: se $m = 2$, a equação algébrica admite 2 como raiz tripla.
 Logo, $m \neq 2$.

301. Pelas relações de Girard, temos:

$$\bullet ab + bc + ac = \frac{a_1}{a_3} = 3$$

$$\bullet abc = -\frac{a_0}{a_3} = 4$$

$$\text{Portanto: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc} = \frac{3}{4}$$

302. Pelas relações de Girard, temos:

$$\bullet ab + bc + ac = 4$$

$$\bullet abc = 1$$

Em que a, b, c são raízes da equação dada.

$$\text{Portanto: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc} = 4.$$

303. Pelas relações de Girard:

$$\bullet a + b + c + d = \frac{7}{2}$$

$$\bullet abcd = 1$$

$$E = \frac{1}{bcd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{abc}$$

$$E = \frac{a + b + c + d}{abcd} = \frac{7}{2}.$$

305. Pelas relações de Girard:

$$\bullet r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -5$$

$$\bullet r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = -11$$

Então:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 =$$

$$= (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)^2 - 2(r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4) =$$

$$= (-5)^2 - 2(-11) = 25 + 22 = 47.$$

- 307.**
- $L + M + N + P = -q$
 - $LM + LN + LP + MN + MP + NP = r$
 - $LMNP = t$

Então:

$$\begin{aligned} \frac{L}{MNP} + \frac{M}{LNP} + \frac{N}{LMP} + \frac{P}{LMN} &= \frac{L^2}{LMNP} + \frac{M^2}{LMNP} + \frac{N^2}{LMNP} + \frac{P^2}{LMNP} = \\ &= \frac{1}{LMNP} [(L + M + N + P)^2 - 2(LM + LN + MN + MP + NP)] = \\ &= \frac{1}{t} [(-q)^2 - 2r] = \frac{q^2 - 2r}{t}. \end{aligned}$$

- 308.**
- $a + b + c = 0$
 - $ab + ac + bc = 1$
 - $abc = 1$

Então:

$$\begin{aligned} \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} &= \frac{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}{abc} = \\ &= \frac{1}{abc} [(ab + ac + bc)^2 - 2abc(a + b + c)] = \\ &= \frac{1}{1} [1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 0] = 1 \text{ e } \log \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) = \log 1 = 0. \end{aligned}$$

- 309.**
- $a + b + c = 0$
 - $abc = -20$

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= \\ &= [(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 = \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) + 3ac(a + c) + 3bc(b + c) + 6abc = \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc - 3abc - 3abc + 6abc = \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \end{aligned}$$

Portanto: $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 + 3abc$
 $a^3 + b^3 + c^3 = 0 + 3(-20) = -60$

- 310.** $r_1 + r_2 + r_3 = 4$ (1)

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -6 \text{ (2)}$$

$$r_1 = r_2 + r_3 \text{ (condição do problema) (3)}$$

Substituindo (3) em (1): $2r_1 = 4 \Rightarrow r_1 = 2$.

Portanto: (2) $r_2 \cdot r_3 = -3$; (3) $r_2 + r_3 = 2$ e r_2 e r_3 são raízes da equação $y^2 - 2y - 3 = 0$, ou seja, $r_2 = 3$ e $r_3 = -1$.

Chequemos com a relação de Girard não utilizada:

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = 6 - 2 - 3 = 1 = \frac{a_1}{a_3} \text{ (confere).}$$

Então: $S = \{-1, 2, 3\}$.

311. $r_1 + r_2 + r_3 = 9 \quad (1)$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 12 \quad (2)$$

$$r_1 = 2(r_2 + r_3) \text{ (condição do problema)} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1): $3r_1 = 18 \Rightarrow r_1 = 6$.

Portanto: (2) $r_2 \cdot r_3 = 2$; (3) $r_2 + r_3 = 3$ e r_2 e r_3 são raízes da equação $y^2 - 3y + 2 = 0$, isto é, $r_2 = 1$ e $r_3 = 2$.

$$\text{Checando: } r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 20 = \frac{a_1}{a_3} \text{ (confere).}$$

Logo: $S = \{1, 2, 6\}$.

312. $r_1 + r_2 + r_3 = 5 \quad (1)$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -8 \quad (2)$$

$$r_1 = 4(r_2 + r_3) \text{ (condição do problema)} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1), temos: $5r_1 = 20 \Rightarrow r_1 = 4$.

Portanto: (2) $r_2 \cdot r_3 = -2$; (3) $r_2 + r_3 = 1$ e r_2 e r_3 são raízes da equação $y^2 - y - 2 = 0$, isto é, $r_2 = -1$ e $r_3 = 2$.

$$\text{Checando: } r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = 4(-1) + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 = 2 = \frac{a_1}{a_3} \text{ (confere).}$$

Logo: $S = \{-1, 2, 4\}$.

313. $a + b + c = 2 \quad (1)$

$$abc = -18 \quad (2)$$

$$c = -a \text{ e } a > 0 \text{ (condição do problema)} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1), temos: $a + b + (-a) = 2 \Rightarrow b = 2$.

Substituindo (3) em (2), temos: $a \cdot 2 \cdot (-a) = -18 \Rightarrow a^2 = 9$.

Como $a > 0$, temos $a = 3$ e, então, $c = -3$.

$$\text{Checando: } ab + bc + ca = 3 \cdot 2 + 2(-3) + (-3)3 = -9 = \frac{a_1}{a_3} \text{ (confere).}$$

Conclusão: $a + b = 5$.

314. $a + b + c = 10 \quad (1)$

$$abc = 30 \quad (2)$$

$$b = c - a \text{ e } a < b < c \text{ (condição do problema)} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1), temos: $c = 5$.

Portanto: (2) $ab = 6$; (1) $a + b = 5$ e a e b são raízes da equação $y^2 - 5y + 6 = 0$, isto é, $a = 2$ e $b = 3$.

$$\text{Checando: } ab + bc + ca = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 31 = \frac{a_1}{a_3} \text{ (confere).}$$

Então: $a - b + c = 4$.

Obs.: Se a condição (III) for imposta de outro modo: $c = b - a$ ou $a = b - c$, a solução encontrada fica incompatível com $a < b < c$.

- 315.** $a + b + c = -2$ (1)
 $abc = 20$ (2)
 $a + c = -1$ e $a < b < c$ (condição do problema) (3)
 Substituindo (3) em (1), temos: $b = -1$.
 Portanto: (2) $ac = -2$; (3) $a + c = -1$ e a e c são raízes da equação $y^2 + y - 2 = 0$, isto é, $a = -2$ e $c = 1$.
 Checando: $ab + bc + ca = (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = -1 = \frac{a_1}{a_3}$ (confere).
 Logo, $a + 2b + c = -3$.

- 316.** $r_1 + r_2 + r_3 = -4$ (1)
 $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = -11$ (2)
 $r_1 + r_2 = -7$ (condição do problema) (3)
 Substituindo (3) em (1), temos: $r_3 = 3$.
 Portanto: (2) $r_1r_2 = 10$; (3) $r_1 + r_2 = -7$ e r_1 e r_2 são raízes de $y^2 + 7y + 10 = 0$, isto é, $r_1 = -2$ e $r_2 = -5$.
 Então: $S = \{-5, -2, 3\}$.

- 317.** $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -4$ (1)
 $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = 9$ (2)
 $r_1 = r_2$ e $r_3 = r_4$ (condição do problema) (3)
 Substituindo (3) em (1) e (2), temos: (1) $r_1 + r_3 = -2$; (2) $r_1r_3 = \pm 3$.
 Portanto: de (1) e (2), temos que r_1 e r_3 são raízes da equação $y^2 + 2y \pm 3 = 0$, isto é, $(r_1 = 1 \text{ e } r_3 = -3)$, ou $(r_1 = -1 + i\sqrt{2} \text{ e } r_3 = -1 - i\sqrt{2})$.
 Checando com $r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \frac{a_2}{a_4} = -2$, temos:
 $S = \{-3, 1\}$.

- 318.** $r_1 + r_2 + r_3 = 10$ (1)
 $r_1r_2r_3 = 30$ (2)
 $r_1 = r_2 - r_3$ (condição do problema) (3)
 Substituindo (3) em (1), temos: $2r_2 = 10 \Rightarrow r_2 = 5$.
 Portanto: (2) $r_1r_3 = 6$; (1) $r_1 + r_3 = 5$ e r_1 e r_3 são raízes da equação $y^2 - 5y + 6 = 0$, isto é, $r_1 = 2$ e $r_3 = 3$.
 Checando: $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = 10 + 6 + 15 = 31 = \frac{a_1}{a_3}$.
 Logo: $S = \{2, 3, 5\}$.

- 319.** $r_1 + r_2 + r_3 = -5$ (1)
 $r_1 r_2 r_3 = 36$ (2)
 $r_1 = r_2 r_3$ (condição do problema) (3)
 Substituindo (3) em (2), temos: $r_1^2 = 36 \Rightarrow r_1 = \pm 6$.
 Portanto:
 a) se $r_1 = 6$, temos:
 (2) $r_2 r_3 = 6$; (1) $r_2 + r_3 = -11$ e r_2 e r_3 são raízes da equação
 $y^2 + 11y + 6 = 0 \Rightarrow r_2 = \frac{-11 - \sqrt{97}}{2}$ e $r_3 = \frac{-11 + \sqrt{97}}{2}$
 b) se $r_1 = -6$, temos:
 (2) $r_2 r_3 = -6$; (1) $r_2 + r_3 = 1$ e r_2 e r_3 são raízes da equação
 $y^2 - y - 6 = 0$, isto é, $r_2 = -2$ e $r_3 = 3$.
 Checando: $r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = -12$. A 1ª solução não convém.
 Logo: $S = \{-6, -2, 3\}$.

- 320.** $r_1 + r_2 + r_3 = \frac{16}{3}$ (1)
 $r_1 r_2 r_3 = 2$ (2)
 $r_1 r_2 = 1$ (condição do problema) (3)
 Substituindo (3) em (2), temos: $r_3 = 2$.
 Portanto, (1) $r_1 + r_2 = \frac{10}{3}$; (3) $r_1 r_2 = 1$ e r_1 e r_2 são raízes da equação
 $3y^2 - 10y + 3 = 0$, isto é, $r_1 = \frac{1}{3}$ e $r_2 = 3$.
 Checando: $r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = \frac{2}{3} + 6 + 1 = \frac{23}{3}$ (confere). Logo:
 $S = \left\{ \frac{1}{3}, 2, 3 \right\}$.

- 321.** $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \frac{26}{5}$ (1)
 $r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4 = -\frac{32}{5}$ (2)
 $r_1 r_2 r_3 r_4 = -\frac{8}{5}$ (3)
 $r_1 r_2 = 2$ (condição do problema) (4)
 Substituindo (4) em (3), vem: (5) $r_3 r_4 = -\frac{4}{5}$. (5)
 De (2) vem:
 $r_1 r_2 (r_3 + r_4) + (r_1 + r_2) r_3 r_4 = -\frac{32}{5} \Rightarrow 2(r_3 + r_4) - \frac{4}{5}(r_1 + r_2) = -\frac{32}{5}$.
 Levando em conta que $r_1 + r_2 = \frac{26}{5} - (r_3 + r_4)$, temos:

$$2(r_3 + r_4) - \frac{4}{5} \left(\frac{26}{5} - r_3 - r_4 \right) = -\frac{32}{5} \Rightarrow r_3 + r_4 = -\frac{4}{5}. \quad (6)$$

As condições (5) e (6) mostram que r_3 e r_4 são raízes da equação

$$5y^2 + 4y - 4 = 0, \text{ isto é, } r_3 = \frac{-2 - 2\sqrt{6}}{5} \text{ e } r_4 = \frac{-2 + 2\sqrt{6}}{5}.$$

Temos também $r_1 r_2 = 2$ e $r_1 + r_2 = 6$; portanto, r_1 e r_2 são raízes da equação $y^2 - 6y + 2 = 0$, isto é, $r_1 = 3 - \sqrt{7}$ e $r_2 = 3 + \sqrt{7}$.

$$\text{Conclusão: } S = \left\{ 3 - \sqrt{7}, 3 + \sqrt{7}, \frac{-2 - 2\sqrt{6}}{5}, \frac{-2 + 2\sqrt{6}}{5} \right\}.$$

322. $r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = 2 \quad (1)$

$$r_1 r_2 = 2 \text{ e } r_1 + r_2 \neq 0 \text{ (condição do problema)} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos: $r_3(r_1 + r_2) = 0 \xRightarrow{(2)} r_3 = 0$.

Portanto, a terceira raiz é 0 (zero).

323. $r_1 + r_2 + r_3 = \frac{19}{2} \quad (1)$

$$r_1 r_2 r_3 = 7 \quad (2)$$

$$r_1 r_2 = 1 \text{ (condição do problema)} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2), temos: $r_3 = 7$.

Portanto: (1) $r_1 + r_2 = \frac{5}{2}$; (3) $r_1 r_2 = 1$ e r_1 e r_2 são raízes da equação

$$2y^2 - 5y + 2 = 0, \text{ isto é, } r_1 = \frac{1}{2} \text{ e } r_2 = 2.$$

$$\text{Checando: } r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = 1 + \frac{7}{2} + 14 = \frac{37}{2} \text{ (confere).}$$

Assim, a soma das duas maiores raízes é $2 + 7 = 9$.

324. $r_1 + r_2 + r_3 = -7 \quad (1)$

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = -6 \quad (2)$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{2} \text{ (condição do problema)} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1) $\frac{5r_2^2}{2} + r_3 = -7$ e (2) $3r_2^2 + 5r_2 r_3 = -12$,

temos $19r_2^2 + 70r_2 - 24 = 0 \Rightarrow r_2 = -4$ ou $r_2 = \frac{6}{19}$. Então:

a) se $r_2 = -4$, decorre $r_3 = 3$ e $r_1 = -6$

b) se $r_2 = \frac{6}{19}$, decorre $r_3 = -\frac{148}{19}$ e $r_1 = \frac{9}{19}$ (falso, pois

$$r_1 r_2 r_3 = \frac{6}{19} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{-148}{19} \neq 72). \text{ Portanto, } S = \{-6, -4, 3\}.$$

325. $r_1 + r_2 + r_3 = \frac{37}{5}$ (1)

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = 18 \quad (2)$$

$$r_1 r_2 r_3 = \frac{72}{5} \quad (3)$$

$$r_1 = \frac{2}{\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}} \text{ ou } r_1(r_2 + r_3) = 2r_2 r_3 \text{ (condição do problema)} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (2) $r_2 r_3 = 6$. Então, (3) $r_1 = \frac{12}{5}$ e (1) $r_2 + r_3 = 5$.

De (1) e (2) temos que r_2 e r_3 são raízes da equação

$y^2 - 5y + 6 = 0$, isto é, $r_2 = 2$ e $r_3 = 3$ e, portanto:

$$S = \left\{ \frac{12}{5}, 3, 2 \right\}.$$

326. Sejam $S_1 = \{r, s, t\}$ e $S_2 = \{r, s, u\}$ os conjuntos solução das equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + bx + 12 = 0$, respectivamente. Então:

$$\begin{array}{l|l} r + s + t = -a & (1) \\ rs + st + tr = 0 & (2) \\ rst = -18 & (3) \end{array} \quad \begin{array}{l} r + s + u = 0 & (4) \\ rs + su + ur = b & (5) \\ rsu = -12 & (6) \end{array}$$

Fazendo (1) - (4), temos: $t - u = -a$. (7)

Fazendo (2) - (5), temos: $(r + s)(t - u) = -b \Rightarrow r + s = \frac{b}{a}$. (8)

Fazendo (3) : (6), temos: $\frac{t}{u} = \frac{3}{2}$. (9)

Resolvendo o sistema (7) e (9), vem $u = -2a$ e $t = -3a$.

Substituindo $t = -3a$ em (1) e (3), vem $r + s = 2a$ (10) e $rs = \frac{6}{a}$. (11)

Substituindo (10) e (11) em (2), vem:

$$\frac{6}{a} + (-3a)(2a) = 0 \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = 1 \text{ ou } \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Comparando (8) e (10), vem $b = 2a^2$.

$$b = 2a^2 = 2 \text{ ou } \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ (respectivamente)}$$

327. $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ (1)

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = m \quad (2)$$

$$r_1 r_2 r_3 = -2 \quad (3)$$

$$r_1 = r_2 \text{ (condição do problema)} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (1), vem $2r_1 + r_3 = 0$ e daí $r_3 = -2r_1$.

Substituindo em (3), vem $r_1 \cdot r_1 \cdot (-2r_1) = -2$ e daí $r_1^3 = 1$.

Então, há 3 soluções:

$$1^a) r_1 = r_2 = 1 \text{ e } r_3 = -2$$

$$m = r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = 1 - 2 - 2 = -3$$

$$2^a) r_1 = r_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ e } r_3 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$m = r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} + (1 + i\sqrt{3}) + (1 + i\sqrt{3}) =$$

$$= \frac{3 + i3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(1 + i\sqrt{3})$$

$$3^a) r_1 = r_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ e } r_3 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$m = r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} + (-1 - i\sqrt{3}) + (-1 - i\sqrt{3}) =$$

$$= \frac{-3 - i3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(-1 - i\sqrt{3})$$

329. $r_1 + r_2 + r_3 = 6 \quad (1)$

$$r_1 r_2 r_3 = 6 \quad (2)$$

$$r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = 11 \quad (3)$$

$$r_1 + r_3 = 2r_2 \text{ (condição do problema)} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (1), resulta: $3r_2 = 6 \Rightarrow r_2 = 2$. Temos, então:

(4) $r_1 + r_3 = 4$ e (2) $r_1 r_3 = 3$ e, portanto, r_1 e r_3 são raízes da equação $y^2 - 4y + 3 = 0$, isto é, $r_1 = 1$ e $r_3 = 3$.

Checando: $r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = 2 + 6 + 3 = 11$ (confere).

$S = \{1, 2, 3\}$.

330. $a + b + c = -6 \quad (1)$

$$ab + bc + ca = 11 \quad (2)$$

$$abc = -6 \quad (3)$$

$$2b = a + c, c > a, c > b \text{ (condição do problema)} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (1), vem $3b = -6 \Rightarrow b = -2$. Então $a + c = -4$ e

$ac = 3$, logo a e c são raízes da equação $y^2 + 4y + 3 = 0$, isto é, $a = -3$ e $c = -1$.

Checando: $ab + bc + ca = 6 + 2 + 3 = 11$ (confere).

Portanto, $a + b + 4c = -9$.

332. $r_1 + r_2 + r_3 = 6 \quad (1)$

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = K \quad (2)$$

$$r_1 r_2 r_3 = -64 \quad (3)$$

$$r_1 r_3 = r_2^2 \text{ (condição do problema)} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3): $r_3^2 = -64 \Rightarrow r_2 = -4$.

Então: (4) $r_1 r_3 = 16$: (1) $r_1 + r_3 = 10$ e r_1 e r_3 são raízes da equação $y^2 - 10y + 16 = 0$, isto é, $r_1 = 2$ e $r_3 = 8$.

Temos, então: (2) $K = -24$.

334. $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 2$ (1)
 $r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = 4$ (2)
 $r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -6$ (3)
 $r_1r_2r_3r_4 = -21$ (4)
 $r_1 = -r_2$ (condição do problema) (5)
 Substituindo (5) e (1), vem $r_3 + r_4 = 2$.
 Substituindo (5) em (3), vem $r_1^2(r_3 + r_4) = 6$ e daí $r_1^2 = 3$.
 Então: $r_1 = \sqrt{3}$ e $r_2 = -\sqrt{3}$ (ou vice-versa).
 De (4) vem $r_3r_4 = 7$, então r_3 e r_4 são raízes da equação
 $y^2 - 2y + 7 = 0$, isto é, $r_3 = 1 + i\sqrt{6}$ e $r_4 = 1 - i\sqrt{6}$.
 Checando (2): $r_1r_2 + (r_1 + r_2)r_3 + (r_1 + r_2)r_4 + r_3r_4 = r_1r_2 + r_3r_4 =$
 $= -3 + 7 = 4$ (confere).
 Conclusão: $S = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{6}, 1 - i\sqrt{6}\}$.

335. $r_1 + r_2 + r_3 = \alpha$ (1)
 $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \beta$ (2)
 $r_1r_2r_3 = \gamma$ (3)
 $r_1 = -r_2$ (condição do problema) (4)
 Substituindo (4) em:

$$\left. \begin{array}{l} r_3 = \alpha \quad (1) \\ -r_1^2 = \beta \quad (2) \\ -r_1^2r_3 = \gamma \quad (3) \end{array} \right\} \Rightarrow \beta\alpha = \gamma$$

336. $r_1 + r_2 + r_3 = 3$ (1)
 $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = -4$ (2)
 $r_1r_2r_3 = -12$ (3)
 $r_1 = -r_2$ (condição do problema) (4)
 Substituindo (4) em (1), vem $r_3 = 3$.
 De (3) vem $r_1r_2 = -4$, então r_1 e r_2 são raízes da equação $y^2 - 4 = 0$,
 ou seja, $r_1 = 2$ e $r_2 = -2$.
 Checando (2): $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = -4 - 6 + 6 = -4$ (confere).
 $S = \{2, -2, 3\}$.

337. $r_1 + r_2 + r_3 = -h$ (1)
 $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = 2h + 1$ (2)
 $r_1r_2r_3 = -1$ (3)
 $r_1 = -r_2$ (condição do problema) (4)
 Substituindo (4) em (1): $r_3 = -h$; (2) $-r_1^2 = 2h + 1$;
 (3) $-r_1^2 \cdot r_3 = -1 \Rightarrow -r_1^2 = \frac{1}{h}$. Então, $2h + 1 = \frac{1}{h} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2h^2 + h - 1 = 0 \Rightarrow h = -1$ ou $h = \frac{1}{2}$.

338. $r_1 + r_2 + r_3 = a$ (1)
 $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = b$ (2)
 $r_1r_2r_3 = c$ (3)
 $r_1 = -r_2$ (condição do problema) (4)
 Substituindo (4) em:
 (1) $r_3 = a$
 (2) $r_1^2 = b$
 (3) $-r_1^2 \cdot r_3 = c \Rightarrow -r_1^2 = \frac{c}{a}$. De (2) e (3): $b = \frac{c}{a} \Rightarrow ab = c$.

339. $\alpha + \beta + \gamma = p$ (1)
 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$ (2)
 $\alpha\beta\gamma = r$ (3)
 $\alpha + \beta = 0$ (4)
 Substituindo (4) em (1), resulta $\gamma = p$ e em (2) $\alpha\beta = q$.
 Assim α e β são as raízes da equação $y^2 + q = 0$, isto é, $\alpha = \sqrt{-q}$
 e $\beta = -\sqrt{-q}$.
 Checando (3): $\alpha\beta\gamma = (\alpha\beta)\gamma = qp$, então $qp = r$ para que o problema
 tenha solução $S = \{\sqrt{-q}, -\sqrt{-q}, p\}$.

342. $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \frac{28}{8}$ (1)
 $r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \frac{18}{8}$ (2)
 $r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -\frac{27}{8}$ (3)
 $r_1r_2r_3r_4 = -\frac{27}{8}$ (4)
 $r_1 = r_2 = r_3$ (condição do problema) (5)
 Substituindo (5) em (1), vem $3r_1 + r_4 = \frac{7}{2}$. (6)
 Substituindo (5) em (2), vem $r_1^2 + r_1r_4 = \frac{3}{4}$. (7)
 Substituindo r_4 de (6) em (7), resulta
 $8r_1^2 - 14r_1 + 3 = 0 \Rightarrow \left(r_1 = \frac{3}{2} \text{ ou } r_1 = \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \left(r_4 = -1 \text{ ou } r_4 = \frac{11}{4}\right)$.
 Checando as condições (3) e (4), vemos que só satisfaz a solução
 $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{3}{2}$ e $r_4 = -1$.

344. $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -2$ (1)
 $r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = p$ (2)
 $r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -q$ (3)
 $r_1r_2r_3r_4 = 2$ (4)
 $\left. \begin{array}{l} r_1 + r_2 = -1 \text{ (5)} \\ r_3 \cdot r_4 = 1 \text{ (6)} \end{array} \right\} \text{ (condições do problema)}$

Substituindo (5) em (1), vem $r_3 + r_4 = -1$, então r_3 e r_4 são raízes da equação $y^2 + y + 1 = 0$, ou seja, $r_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ e $r_4 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Substituindo (6) em (4), vem $r_1 r_2 = 2$, então r_1 e r_2 são as raízes da equação $y^2 + y + 2 = 0$, ou seja, $r_1 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$ e $r_2 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$.

De (2) vem $p = 4$.

De (3) vem $-q = -3$, portanto, $q = 3$.

346. $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ (1)
 $r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = -7$ (2)
 $r_1 r_2 r_3 = -m$ (3)
 $r_1 = 2r_2$ (condição do problema) (4)

Substituindo (4) em (1) e (2):

$$3r_2 + r_3 = 0 \quad (5)$$

$$2r_2^2 + 3r_3 \cdot r_2 = -7 \quad (6)$$

De (5) e (6), temos: $r_2 = \pm 1$

a) se $r_2 = 1 \Rightarrow r_1 = 2$; $r_3 = -3$ e $m = 6$.

b) se $r_2 = -1 \Rightarrow r_1 = -2$; $r_3 = 3$ e $m = -6$.

Portanto, $m = 6$ e $S = \{1, 2, -3\}$ ou $m = -6$ e $S = \{-1, -2, 3\}$.

347. $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ (1)
 $r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = p$ (2)
 $r_1 r_2 r_3 = -q$ (3)
 $r_1 = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \Rightarrow r_1 r_2 r_3 = r_2 + r_3$ (condição do problema) (4)

De (4) e (3), resulta: $r_2 + r_3 = -q$ (5)

De (5) e (1), temos: $r_1 = q$ (6)

De (6) e (3): $r_2 r_3 = -1$ e, portanto,

$$(2) \quad r_1(r_2 + r_3) + r_2 r_3 = p \Rightarrow q(-q) + (-1) = p \Rightarrow -q^2 = p + 1 = 0.$$

348. $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -p$ (1)
 $r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4 = q$ (2)
 $r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4 = -r$ (3)
 $r_1 r_2 r_3 r_4 = s$ (4)

a) $r_1 r_4 = r_2 r_3$ (condição do problema) (5)

Substituindo (5) em (3) e (4), temos:

$$r_2 r_3(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) = -r \quad (6)$$

$$(r_2 r_3)^2 = s \quad (7)$$

De (1) e (6), resulta: $r_2 r_3 = \frac{r}{p}$ e $(r_2 r_3)^2 = \left(\frac{r}{p}\right)^2 = s$.

$$r_2 r_3 p = r \Rightarrow r_2^2 r_3^2 p^2 = r^2 \xRightarrow{(7)} s p^2 = r^2$$

b) $r_1 + r_4 = r_2 + r_3$ (condição do problema) (8)

Substituindo (8) em (1), temos:

$r_2 + r_3 = r_1 + r_4 = -\frac{p}{2}$. Então:

(2) $r_1 r_4 + r_2 r_3 + (r_1 + r_4)(r_2 + r_3) = q \Rightarrow r_1 r_4 + r_2 r_3 = q - \frac{p^2}{4}$

(3) $r_1 r_4 (r_2 + r_3) + r_2 r_3 (r_1 + r_4) = -r \Rightarrow r_1 r_4 + r_2 r_3 = \frac{2r}{p}$

e daí $q - \frac{p^2}{4} = \frac{2r}{p}$ e finalmente $p^3 - 4pq + 8r = 0$.

349. $r_1 + r_2 + r_3 = -2$ (1)

$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = p$ (2)

$r_1 r_2 r_3 = -8$ (3)

$r_1 r_3 = r_2^2$ (condição do problema) (4)

Substituindo (4) em (3): $r_2^3 = -8 \Rightarrow r_2 = -2$. Então:

(4) $r_1 r_3 = 4$ e (1) $r_1 + r_3 = 0$ e r_1 e r_3 são raízes da equação $y^2 + 4 = 0$, isto é, $r_1 = 2i$ e $r_3 = -2i$. Portanto,

(2) $2i(-2) + 2i(-2i) - 2(-2i) = p \Rightarrow p = 4$ e

$x^3 + 2x^2 + px + 8 = x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$; $S = \{-2, 2i, -2i\}$.

350. $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -p$ (1)

$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4 = 2$ (2)

$r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4 = 1$ (3)

$r_1 r_2 r_3 r_4 = q$ (4)

$r_3 + r_4 = 1$ e $r_1 = \frac{1}{r_2}$ (condição do problema) (5)

Substituindo (5) nas anteriores, vem:

(1) $r_1 + r_2 = -p - 1$

(4) $r_3 r_4 = q$

(2) $r_1 r_2 + (r_1 + r_2)(r_3 + r_4) + r_3 r_4 = 2 \Rightarrow 1 + (-p - 1)(1) + q = 2 \Rightarrow q = p + 2$

(3) $r_1 r_2 (r_3 + r_4) + (r_1 + r_2) r_3 r_4 = 1 \Rightarrow 1 \cdot 1 + (-p - 1)q = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow q(p + 1) = 0 \Rightarrow (p + 2)(p + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = -2 \text{ e } q = 0 \\ p = -1 \text{ e } q = 1 \end{cases}$

351. $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{8}{m}$ (1)

$r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4 = -\frac{k}{m}$ (2)

$r_1 r_2 r_3 r_4 = \frac{1}{m}$ (3)

$r_1 r_2 = -1$ e $r_3 r_4 = -1$ (condição do problema) (4)

Substituindo (4) em (2) e (3), temos:

(2) $(-1)r_3 + (-1)r_4 + r_1(-1) + r_2(-1) = -\frac{k}{m}$

$$-(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) = \frac{8}{m} = -\frac{k}{m} \Rightarrow k = -8$$

$$(3)(-1)(-1) = \frac{1}{m} \Rightarrow m = 1$$

Portanto, $m = 1$ e $k = -8$.

352.

$$a + b + c = 0 \quad (1)$$

$$ab + ac + bc = -3 \quad (2)$$

$$abc = -54 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Então, } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} &= \frac{1}{(abc)^2} [(ab + ac + bc)^2 - 2abc(a + b + c)] \\ &= \frac{1}{(-54)^2} [(-3)^2 - 2(-54) \cdot 0] = \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Portanto: } \log \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) &= \log \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} = -\log 2^2 \cdot 3^2 = \\ &= -(2 \log 2 + 4 \log 3) = -2 \log 2 - 4 \log 3. \end{aligned}$$

353.

Se a e b são raízes da equação $x^2 - px + B^m = 0$, então:

$$a + b = p \quad (1)$$

$$a \cdot b = B^m \quad (2)$$

Temos:

$$2) (a \cdot b)^a \cdot (a \cdot b)^b = (B^m)^a \cdot (B^m)^b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^a \cdot b^a \cdot a^b \cdot b^b = B^{m(a+b)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_B a^a \cdot b^a \cdot a^b \cdot b^b = \log_B B^{mp} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_B a^a + \log_B b^a + \log_B a^b + \log_B b^b = mp$$

$$\log_B a^a + \log_B b^b + \log_B a^b + \log_B b^a = mp$$

356.

Se $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = -1 + i$ são as raízes do polinômio f de coeficientes reais, então f admite as raízes $1 + i$, $1 - i$, $-1 + i$ e $-1 - i$. Logo, o grau mínimo do polinômio é 4.

357.

Se o polinômio de coeficientes reais p possui três raízes, duas das quais são 0 e i , então o polinômio pode ser expresso:
 $p = a(x - 0)(x - i)(x + i) = ax(x^2 + 1) = ax^3 + ax \quad (a \neq 0)$.

358.

Se $1 + i$, $1 + i^2$ e $2 - i$ são raízes do polinômio p de coeficientes reais, então p admite as raízes: $1 + i$, $1 - i$, 0 , $2 - i$ e $2 + i$. Portanto, o grau do polinômio p é maior ou igual a 5.

359.

Fazendo $x^2 = y$, temos:

$$y^2 + 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \text{ ou } y = -2 \text{ e, portanto,}$$

$$x^2 = -1 \Rightarrow x = i \text{ ou } x = -i$$

$$x^2 = -2 \Rightarrow y = i\sqrt{2} \text{ ou } x = -i\sqrt{2}$$

$$S = \{i, -i, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}.$$

- 362.** Se 1, 2 e i são raízes simples e 0 é raiz dupla de uma equação polinomial do 6º grau, então essa equação é:

$$(x - 0)^2(x - 1)(x - 2)(x - i)(x + i) = 0$$

$$x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 2x^2 = 0.$$

- 363.** A equação algébrica $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d$ admite 1 como raiz dupla e i como raiz simples. Então:

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = (x - 1)^2(x - i)(x + i) =$$

$$= x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1$$

Temos: $a = b = c = 2$ e $d = 1$.

- 364.** Se a equação $x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$ admite $1 + i$ como raiz, então admite $1 - i$ como raiz. Temos:

$$x^3 + mx^2 + 2x + n = (x - a)(x - 1 - i)(x - 1 + i) =$$

$$= x^3 + (a - 2)x^2 + (2 - 2a)x + 2a$$

Então:

$$\begin{cases} m = a - 2 \\ 2 = 2 - 2a \Rightarrow a = 0 \\ n = 2a \text{ e, portanto, } m = -2 \text{ e } n = 0. \end{cases}$$

- 365.** Se a equação $2x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ admite a raiz $2 + i$, então admite $2 - i$ como raiz. Temos, então:

$$2x^3 - 5x^2 + ax + b = k(x - m)(x - 2 - i)(x - 2 + i) =$$

$$= kx^3 - k(4 + m)x^2 + k(5 + 4m)x - 5km$$

Então:

$$\begin{cases} k = 2 \\ -k(4 + m) = -5 \Rightarrow m = -\frac{3}{2} \\ k(5 + 4m) = a \Rightarrow a = -2 \\ -5km = b \Rightarrow b = 15. \end{cases}$$

Portanto, $a = -2$ e $b = 15$.

- 366.** Se i é uma das raízes e tem multiplicidade 3, então $-i$ também é raiz tripla. Seja r a sétima raiz. Temos:

$$x^7 - x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x - 1 =$$

$$= (x - r)(x - i)^3(x + i)^3 = (x - r)(x^2 + 1)^3 =$$

$$= (x - r)(x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1) =$$

$$= x^7 - rx^6 + 3x^5 - 3rx^4 + 3x^3 - 3rx^2 + x - r$$

Portanto, $r = 1$ e $S = \{1, i, -i\}$.

367. Sejam a , b e c as raízes da equação do terceiro grau com coeficientes reais e, se $a = 1 + 2i$ e $b + c = 3 - 2i$, temos $b = 1 - 2i$ e $c = (3 - 2i) - (1 - 2i) = 2$ e, portanto,
 $S = \{1 + 2i, 1 - 2i, 2\}$.

368. $P(x) = x^4 + Cx^2 + Dx + E$ (C, D, E reais)
 $P(x) = Q(x) \cdot Q_1(x) + 15 = Q(x)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8) + 15$
 Temos, então:
 $\text{gr}Q(x) = 1 \Rightarrow Q(x) = ax + b$
 $P(x) = (ax + b)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8) + 15$
 $\quad = ax^4 + (2a + b)x^3 + (4a + 2b)x^2 + (8a + 4b)x + 8b + 15$

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2 \\ 4a + 2b = C \Rightarrow C = 0 \\ 8a + 4b = D \Rightarrow D = 0 \\ 8b + 15 = E \Rightarrow E = -1 \end{cases}$$

 e $P(x) = x^4 + 0x^2 + 0x - 1 = x^4 - 1$.
 Como i é raiz de $P(x) = 0$, então $-i$ é raiz de $P(x)$. Temos:
 $P(x) = (x - i)(x + i)(x^2 - 1) = 0$.
 As outras raízes são 1 e -1 .
 $S = \{1, -1, i, -i\}$.

369. a) $P(x) = x^5 + 2x^3 + x + 1 = 0$
 $P(1) = 5 > 0$; $P(2) = 51 > 0$. $P(1)$ e $P(2)$ têm mesmo sinal, então a equação pode ter 4 ou 2 ou nenhuma raiz real no intervalo dado. Como $P(x) > 0$ em $1 < x < 2$, não tem raiz que satisfaz $1 < r < 2$.
 b) $P(x) = x^5 - 3x^2 + x - 4 = 0$
 $P(1) = -5 < 0$; $P(2) = 18 > 0$. $P(1)$ e $P(2)$ têm sinais contrários, então a equação pode ter um número ímpar de raízes no intervalo dado. Como $P(x)$ é crescente em $1 < x < 2$, então admite ao menos uma raiz real que satisfaz $1 < r < 2$.
 c) $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = 0$
 $P(1) = 3 > 0$; $P(2) = 0$. Se $P(2) = 0$, então 2 é raiz de $P(x) = 0$. Logo, as outras raízes são 2 e $-\frac{1}{2}$. Como $1 < r < 2$, não existem raízes no intervalo dado.
 d) $P(x) = x^3 - 9x + 4 = 0$
 $P(1) = -5 < 0$; $P(2) = -6 < 0$. $P(1)$ e $P(2)$ têm mesmo sinal, a equação pode ter duas ou nenhuma raiz real no intervalo dado. Como $P(x) < 0$ em $1 < x < 2$, não tem raiz nesse intervalo.

e) $P(x) = x^4 + \frac{2}{3} \cdot x^3 + x + 20 = 0$
 $P(1) = \frac{68}{3} > 0$; $P(2) = \frac{130}{3} > 0$. $P(1)$ e $P(2)$ têm mesmo sinal,
 então a equação pode ter 4, 2 ou nenhuma raiz no intervalo dado.
 Como $P(x) > 0$ em $1 < x < 2$, não tem raiz nesse intervalo.
 Portanto, a alternativa correta é *b*.

370. Pelo teorema de Bolzano: $P(-1) > 0$ e $P(2) > 0$. $P(-1)$ e $P(2)$ têm mesmo sinal, então existe um número par de raízes reais de $P(x) = 0$ em $] -1, 2[$ e, portanto a alternativa correta é *a*.

371. Pelo teorema fundamental da álgebra: a equação admite ao menos uma raiz complexa $z = a + ib$, então admite $\bar{z} = a - ib$ com raiz. Portanto, a outra raiz é real.

372. $x^n - 1 = 0$, com n par e $n > 5$, é uma equação binômia. Suas n raízes são as n raízes enéximas de 1, dadas pela fórmula $z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2k\pi}{n}$, com $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.
 Para $k = 0$ temos $z_0 = 1$, para $k = \frac{n}{2}$ temos $z_{\frac{n}{2}} = -1$ e para os outros $n - 2$ valores temos z_k não real.
 Então a alternativa *a* está correta.

373. Dividindo $x^3 + 4x^2 + x - 6$ por $x - 1$, obtemos:
 $x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$
 então as outras duas raízes são as raízes de $x^2 + 5x + 6 = 0$, isto é, -3 e -2 ; portanto, reais e negativas.

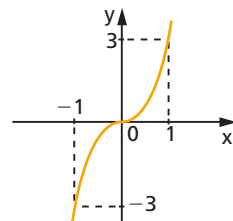
374. Se -1 é raiz de $x^3 + (m + 1)x^2 + (m + 9)x + 9 = 0$, então as outras duas raízes de $x^2 + mx + 9 = 0$. Temos, então:
 $\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta = m^2 - 36 \geq 0 \Rightarrow (m - 6)(m + 6) \geq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow m \leq -6$ ou $m \geq 6$.

376. $P(0) = -1 < 0$; $P(3) = -49 < 0$. $P(0)$ e $P(3)$ têm mesmo sinal, então $P(x) = 0$ pode ter duas ou nenhuma raiz no intervalo dado. Mas $P(x) < 0$ em $0 < x < 3$ e, portanto, não existe nenhuma raiz real.

377.

y	$y = f(x)$
-1	-3
0	0
1	3

$f(0) = 0 \Rightarrow 0$ é raiz. Portanto: 1 raiz real.



378. $P(0) = \alpha$; $P(-2) = \alpha - 14$. Para que $P(x) = x^3 + x^2 + 5x + \alpha$ tenha ao menos uma raiz real em $] -2, 0[$, devemos ter $P(-2) \cdot P(0) < 0 \Rightarrow \Rightarrow \alpha(\alpha - 14) < 0$ e, portanto, $0 < \alpha < 14$.

379. $P(2) = 6 - k$; $P(3) = 18 - k$. Para que $y = x^3 - 2x^2 + 3x - k$ tenha um zero entre 2 e 3 é necessário que $P(2) \cdot P(3) < 0 \Rightarrow \Rightarrow (6 - k)(18 - k) < 0$ e, portanto, $6 < k < 18$.

380. Para que $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - k$ tenha um ou três zeros entre 1 e 2 é necessário que $P(1) \cdot P(2) < 0$. Temos, então:
 $P(1) = 2 - k$; $P(2) = 6 - k \Rightarrow P(1) \cdot P(2) = (2 - k) \cdot (6 - k) < 0$ e, portanto, $2 < k < 6$.

381. Seja $P(x) = 2x^4 + bx^3 - bx - 2 = 0$. Temos: $P(1) = 0$ e $P(-1) = 0$. Aplicando Briot:

2	b	0	-b	-2	1
2	2 + b	2 + b	2	0	-1
2	b	2	0		

e recaímos em $2x^2 + bx + 2 = 0$, que deverá ter duas raízes reais distintas entre si e distintas de 1 e -1. Então:

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 16 > 0 \Rightarrow b < -4 \text{ ou } b > 4$$

$$2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 \neq 0 \Rightarrow b \neq -4$$

$$2 \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 2 \neq 0 \Rightarrow b \neq -4.$$

Conclusão: $b < -4$ ou $b > 4$.

382. Trata-se de um polinômio $f = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ de coeficientes reais (pois tem gráfico cartesiano) com uma raiz igual a -2 e outra igual a 3, então não poderá ter a terceira raiz complexa (pois admitiria também a sua conjugada). Alternativas a e c descartadas.
 $f(0) = a_0 = -3 \Rightarrow$ alternativa b é correta.

383. O gráfico indica um polinômio de coeficientes reais que tem uma raiz dupla negativa, uma raiz simples igual a zero e uma raiz simples positiva; então o grau do polinômio é no mínimo 4. Como o polinômio tem limite $+\infty$ para $x \rightarrow +\infty$ e para $x \rightarrow -\infty$, então seu grau é par e seu coeficiente dominante é positivo; portanto, pode ser do 6º grau. A alternativa correta é c.

384. $P(-2) = -1$ e $P(-1) = 2 \Rightarrow P(-2) \cdot P(-1) < 0 \Rightarrow$ existe pelo menos uma raiz real no intervalo $] -2, -1[$.
 $P(-1) = 2$ e $P(0) = -4 \Rightarrow P(-1) \cdot P(0) < 0 \Rightarrow$ existe pelo menos uma raiz real no intervalo $] -1, 0[$.
 $P(0) = -4$ e $P(1) = -7 \Rightarrow P(0) \cdot P(1) > 0 \Rightarrow$ existe um número par de raízes reais no intervalo $]0, 1[$.

$P(1) = -7$ e $P(2) > 0 \Rightarrow P(1) \cdot P(2) < 0 \Rightarrow$ existe pelo menos uma raiz real no intervalo $]1, 2[$. Como P é um polinômio do 5º grau de coeficientes reais com duas raízes imaginárias, então P tem três raízes reais α, β e γ tais que $-2 < \alpha < -1, -1 < \beta < 0$ e $1 < \gamma < 2$.

389. O coeficiente dominante de $f = x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m = 0$ é unitário ($a_0 = 1$). Então, se $f(x) = 0$ admite uma raiz racional $\frac{p}{q}$, essa raiz é necessariamente inteira, pois $q = 1$. Portanto, $f(x) = 0$ não admite raízes reais fracionárias e as eventuais raízes inteiras são os divisores de a_m .

390. Seja $P(x)$ tal que $P(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$. Então:

$$q = 1 \Rightarrow \frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$$

$$P(1) = 0; P(3) = 0$$

1	-9	23	-15	1
1	-8	15	0	3
1	-5	0		

e recaímos em $x - 5 = 0$ ou $x = 5$. Portanto, $S = \{1, 3, 5\}$.

392. Seja $P(x)$ tal que $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

$$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2\}$$

$$P(1) = 0; P(-1) = 0; P(2) = 0. \text{ Então, } S = \{-1, 1, 2\}.$$

393. Seja $P(x)$ tal que $P(x) = x^5 - 8x^3 + 6x^2 + 7x - 6 = 0$.

$$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

$$P(-1) = P(1) = P(2) = P(-3) = 0; P(-2) \neq 0; P(3) \neq 0; P(-6) \neq 0 \text{ e } P(6) \neq 0. \text{ Então, } S = \{-1, 1, 2, -3\}.$$

397. Se a equação $4x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$ admite i como raiz, então $-i$ é também raiz da equação. Temos:

$$4x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = Q(x)(x - i)(x + i) = (4x - 3)(x^2 + 1) \text{ e } P\left(\frac{3}{4}\right) = 0.$$

Portanto, a equação admite como raiz um número racional. Alternativa b .

398. Seja $P(x) = 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$.

$$\frac{p}{q} \in \left\{\pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm 3\right\}$$

$$P(1) = P\left(\frac{1}{3}\right) = P(3) = 0. \text{ Então, } S = \left\{1, \frac{1}{3}, 3\right\}.$$

399. Seja $P(x) = 15x^3 + 7x^2 - 7x + 1 = 0$.

$$\frac{p}{q} \in \left\{ \pm \frac{1}{15}, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{1}{3}, \pm 1 \right\}$$

$$P(-1) = P\left(\frac{1}{5}\right) = P\left(\frac{1}{3}\right) = 0. \text{ Portanto, } S = \left\{ -1, \frac{1}{5}, \frac{1}{3} \right\}.$$

400. Seja $P(x) = x^5 - x^4 - 82x^3 - 281x^2 - 279x - 198 = 0$.

$$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 11, \pm 18, \pm 22, \pm 33, \pm 66, \pm 99, \pm 198\}$$

$P(-3) = P(-6) = P(11) = 0$. Aplicando Briot:

1	-1	-82	-281	-279	-198	-3
1	-4	-70	-71	-66	0	-6
1	-10	-10	-11	0		11
1	1	1	0			

e recaímos em $x^2 + x + 1 = 0$ ou $x = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ ou $x = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ e

$$S = \left\{ 11, -3, -6, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

401. Seja $P(x) = x^6 + 8x^4 + 21x^2 + 60 = 0$.

$P(x) > 0, \forall x$, pois $x^6 \geq 0, x^4 \geq 0$ e $x^2 \geq 0$, portanto, não possui nenhuma raiz inteira.

402. Seja $P(x) = x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0$.

$$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

$P(-3) = 0 \Rightarrow P(x) = (x + 3)(x^2 - 2x + 2) = 0$ e resolvendo a equação $x^2 - 2x + 2 = 0$, temos $x = 1 + i$ ou $x = 1 - i$ e, portanto,

$$S = \{-3, 1 + i, 1 - i\}.$$

403. As possíveis raízes racionais da equação $5x^3 - 37x^2 + 90x - 72 = 0$, em que todos os coeficientes são inteiros, são os números da forma

$$\frac{p}{q} \text{ em que } q \in \{1, -1, 5, -5\} \text{ e}$$

$$p \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 8, -8, 9, -9, 12, -12, 18, -18, 24, -24, 36, -36, 72, -72\}$$

Testando os números $\frac{p}{q}$ inteiros, encontramos a raiz $x = 2$. Aplicando Briot, temos:

5	-37	90	-72	2
5	-27	36	0	

As demais raízes são raízes de $5x^2 - 27x + 36 = 0$,

ou seja, $x = 3$ ou $x = \frac{12}{5}$.

Conclusão: $S = \left\{2, 3, \frac{12}{5}\right\}$.

- 404.** Seja $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ e, se i é a solução da equação, então $-i$ é também solução da equação. Temos:

$x^4 - 3x^2 - 4 = Q(x)(x - i)(x + i) = (x^2 - 4)(x^2 + 1)$ e, portanto, as outras raízes são reais, isto é, $x = 2$ ou $x = -2$.

Resposta: duas.

- 405.** $(x - a)(x - b) = 0 \Rightarrow S_1 = \{a, b\}$, a e $b \in \mathbb{Q}$
 $x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow S_2 = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.
 Então, as duas equações não podem ter raízes comuns.

- 406.** $4\binom{x}{3} - 5\binom{x}{2} = 5 \Rightarrow 4x^3 - 27x^2 + 23x - 30 = 0$

$$\frac{p}{q} \in \left\{\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \dots, \pm 30\right\}$$

$P(6) = 0$. Aplicando Briot-Ruffini:

4	-27	23	-30	6
4	-3	5	0	

e recaímos em $4x^2 - 3x + 5 = 0$ ou $x = \frac{3 + i\sqrt{72}}{8} \notin \mathbb{N}$.

Portanto, $S = \{6\}$.

- 407.** $\frac{A_{x+2,4}}{A_{x-1,2}} = 70 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 68x + 140 = 0$

$$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 7, \dots, \pm 140\}$$

$P(5) = 0$. Aplicando Briot:

1	3	-68	140	5
1	8	-28	0	

e recaímos na equação $x^2 + 8x - 28 = 0$, isto é, $x = -4 \pm 2\sqrt{11}$.

Como $x \in \mathbb{N}$, temos que $S = \{5\}$.

- 408.** a) $P(x) = \left(x - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(x - 5) =$

$$= (x^2 - x + 1)(x - 5)$$

$$= x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$$

b) $(n + 1)^3 = (n - 2)^3 + (n - 1)^3 + n^3$ (condição do problema), então $n^3 - 6n^2 + 6n - 5 = 0$, n inteiro. Usando o item a, $n = 5$, e, portanto, os quatro inteiros consecutivos são: 3, 4, 5 e 6.

- 409.** Fazendo $2^{2x} = y$, a equação fica:
 $y^4 + 14y^3 - 96y^2 - 896y + 2048 = 0$.
 Pesquisando entre os divisores de 2048 as raízes inteiras dessa equação, encontramos as raízes 2, 8, -8 e -16. Daí vem:
 $y = 2 \Rightarrow 2^{2x} = 2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
 $y = 8 \Rightarrow 2^{2x} = 8 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
 $y = -8 \Rightarrow 2^{2x} = -8 \Rightarrow \nexists x$
 $y = -16 \Rightarrow 2^{2x} = -16 \Rightarrow \nexists x$.
 Conclusão: $S = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}$.
- 410.** Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$, uma equação polinomial de coeficientes inteiros.
 Se $P(x)$ admite como raiz o número irracional $a + \sqrt{b}$, então admite $a - \sqrt{b}$ como raiz.
 Chamemos de $q = a + \sqrt{b}$ e $\bar{q} = a - \sqrt{b}$. Temos que $(\bar{q})^n = \bar{q}^n$.
 Provemos que $\bar{q} = a - \sqrt{b}$ é raiz dessa equação, isto é, $P(\bar{q}) = 0$.

$$\begin{aligned} P(\bar{q}) &= a_n (\bar{q})^n + a_{n-1} (\bar{q})^{n-1} + \dots + a_1 (\bar{q}) + a_0 = \\ &= a_n \bar{q}^n + a_{n-1} \bar{q}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{q} + a_0 = \\ &= \overline{a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q + a_0} = \\ &= \overline{a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q + a_0} = \\ &= \overline{P(q)} = \overline{0} = 0 \end{aligned}$$
- 411.** Se 1, 2 e $1 - \sqrt{2}$ são raízes de uma equação de coeficientes inteiros, temos:
 $(x - 1)(x - 2)(x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2}) = 0$
 $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 2x - 1) = 0$
 $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - x - 2 = 0$
- 412.** Se $1 + \sqrt{2}$ é raiz da equação $3x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 3x + 2$, então $1 - \sqrt{2}$ é também raiz da equação. Temos, então:
 $3x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 3x + 2 = Q(x)(x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2}) =$
 $= (3x^2 + x - 2)(x^2 - 2x - 1)$
 e resolvendo a equação $3x^2 + x - 2 = 0$, temos $x = -1$ ou $x = \frac{2}{3}$, e, portanto, $S = \left\{ -1, \frac{2}{3}, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2} \right\}$.

- 413.** $(x - 2)^3 = 4 - x \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 13x - 12 = 0$. Então:
 $\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$.
 $P(3) = 0$ e dividindo a equação por $x - 3$ encontramos o quociente
 $x^2 - 3x + 4 = 0$, ou seja, $x = \frac{3 + i\sqrt{7}}{2}$ ou $x = \frac{3 - i\sqrt{7}}{2}$.
 Portanto, $S = \left\{ 3, \frac{3 + i\sqrt{7}}{2}, \frac{3 - i\sqrt{7}}{2} \right\}$.

CAPÍTULO IV — Transformações

415.

-2	3	-4	2	
	3	-10		$22 = R_0$
	3			$-16 = R_1$
	3			$3 = R_2$

Portanto, $P(x) = 3(x + 2)^2 - 16(x + 2) + 22$.

416.

1	2	-3	4	-5	
	2	-1	3		$-2 = R_0$
	2	1			$4 = R_1$
	2				$3 = R_2$
	2				$2 = R_3$

Portanto, $y = 2(x - 1)^3 + 3(x - 1)^2 + 4(x - 1) - 2$ e o coeficiente de $(x - 1)^2$ é $R_2 = 3$.

- 417.** A transformada aditiva é $R_2(x + a)^2 + R_1(x + a) + R_0 = 0$.
 Aplicando Horner-Ruffini:

-a	5	-3	8	
	5	-5a - 3		$5a^2 + 3a + 8 = R_0$
	5			$-10a - 3 = R_1$
	5			$5 = R_2$

Para que a equação seja desprovida do termo do primeiro grau, devemos ter:

$$R_1 = 0 \Rightarrow -10a - 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{10}$$

$$R_2 = 5; R_0 = 5\left(-\frac{3}{10}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{10}\right) + 8 = \frac{151}{20} \text{ e, portanto,}$$

$$100y^2 + 151 = 0.$$

- 419.** Basta fazer a transformação multiplicativa $y = 2x$. Então:

$$5\left(\frac{y}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{y}{2}\right) - 2 = 0$$

$$5y^3 - 8y^2 + 28y - 16 = 0.$$

- 420.** Basta fazer a transformação multiplicativa $y = 4x$. Então:

$$\left(\frac{y}{4}\right)^3 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{4}\right) - 3 = 0$$

$$y^3 - 4y^2 + 32y - 192 = 0.$$

- 422.** A transformada aditiva é:

$$R_3(x - 2)^3 + R_2(x - 2)^2 + R_1(x - 2) + R_0 = 0.$$

Aplicando Horner-Ruffini:

2	2	-1	1	-1	
	2	3	7		$13 = R_0$
	2	7			$21 = R_1$
	2				$11 = R_2$
	2				$2 = R_3$

Portanto, $2y^3 + 11y^2 + 21y + 13 = 0$.

- 423.** Seja $P_1(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$. Sendo em $y = x - h$ aditiva, temos:

$P_2(y) = R_n \cdot y^n + R_{n-1} \cdot y^{n-1} + \dots + R_1y + R_0 = 0$, então para que P_2 admita raiz nula, deve-se ter $R_0 = P_1(h) = 0$, ou seja, h é raiz de P_1 .

- 425.** $P_1(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 6 = 0$; $P_2(y) = y^3 + y - 4 = 0$ e $y = x + a$. Aplicando Horner-Ruffini, temos:

-a	1	-3	4	-6	
	1	-a - 3	$a^2 + 3a + 4$		$-a^3 - 3a^2 - 4a - 6 = R_0$
	1	-2a - 3	$3a^2 + 6a + 4 = R_1$		
	1	-3a - 3 = R_2			
	1 = R_3				

portanto,

$$\begin{cases} -a^3 - 3a^2 - 4a - 6 = -4 \\ 3a^2 + 6a + 4 = 1 \\ -3a - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

Então, a relação de transformação é $y = x - 1$.

- 426.** $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$; $y = x + k$ a relação de transformação. Temos:

A transformada aditiva é: $R_3(x + k)^3 + R_2(x + k)^2 + R_1(x + k) + R_0 = 0$.

Aplicando Horner-Ruffini, vem:

$-k$	a	b	c	d
	a	$b - ak$	$ak^2 - bk + c$	$-ak^3 + bk^2 - ck + d = R_0$
	a	$b - 2ak$	$3ak^2 - 2bk + c = R_1$	
	a	$b - 3ak = R_2$		
	$a = R_3$			

Para não ocorrer o termo do segundo grau, devemos ter:

$$R_2 = 0 \Rightarrow b - 3ak = 0 \Rightarrow k = \frac{b}{3a}$$

$$R_3 = a; R_1 = 3a\left(\frac{b}{3a}\right)^2 - 2b\left(\frac{b}{3a}\right) + c = \frac{-b^2 + 3ac}{3a}$$

$$R_0 = -a\left(\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{b}{3a}\right)^2 - c\left(\frac{b}{3a}\right) + d = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2}.$$

$$\text{Então: } 27a^3y^3 + (27a^2c - 9ab^2)y + (2b^3 - 9abc + 27a^2d) = 0.$$

434. $4x^6 - 21x^4 + 21x^2 - 4 = 0$

2^a espécie e grau par $\Rightarrow 1$ e -1 são raízes

4	0	-21	0	21	0	-4	1
4	4	-17	-17	4	4	0	-1
4	0	-17	0	4	0		

Recaímos em $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

Fazendo $x^2 = y$, vem $4y^2 - 17y + 4 = 0$ e daí

$$y = \frac{17 \pm 15}{8} \Rightarrow y = 4 \text{ ou } y = \frac{1}{4}$$

$$\text{Então } x = \pm 2 \text{ ou } x = \pm \frac{1}{2}.$$

$$\text{Conclusão: } S = \left\{1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}.$$

435. $ax^5 - bx^4 + (3b - 5a)x^3 - (3b - 5a)x^2 + bx - a = 0.$

Trata-se de uma equação de 2^a espécie e grau ímpar $\Rightarrow 1$ é raiz.

a	$-b$	$3b - 5a$	$5a - 3b$	b	$-a$	1
a	$a - b$	$2b - 4a$	$a - b$	a	0	

Recaímos em $ax^4 + (a - b)x^3 + (2b - 4a)x^2 + (a - b)x + a = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow ax^2 + (a - b)x + (2b - 4a) + (a - b)\frac{1}{x} + a\frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + (a - b)\left(x + \frac{1}{x}\right) + (2b - 4a) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ay^2 + (a - b)y + (2b - 6a) = 0 \Rightarrow y = \frac{-(a - b) \pm (5a - b)}{2a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2 \text{ ou } y = \frac{b - 3a}{2}.$$

$$\bullet x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

$$\bullet x + \frac{1}{x} = \frac{b - 3a}{2} \Rightarrow ax^2 + (3a - b)x + a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{b - 3a \pm \sqrt{5a^2 - 6ab + b^2}}{2a}.$$

$$S = \left\{ 1, \frac{-3a + b + \sqrt{5a^2 - 6ab + b^2}}{2a}, \frac{-3a + b - \sqrt{5a^2 - 6ab + b^2}}{2a} \right\}.$$

436. $x^6 + 8ax^5 + (b - 2)x^4 + (4a + b + c)x^3 + 2ax^2 + (b - 2a)x - 1 = 0$

$a_n = -a_0$, grau par $\Rightarrow 2^\text{a}$ espécie, par.

Então:

$$\left. \begin{array}{l} 8a = -(b - 2a) \\ b - 2 = -2a \\ 4a + b + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}; b = 3; c = -1$$

Portanto: $x^6 - 4x^5 + x^4 - x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow 1 \text{ e } -1$ são raízes

Briot:

1	-4	1	0	-1	4	-1	1
1	-3	-2	-2	-3	1	0	-1
1	-4	2	-4	1	0		

Recaímos em $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = 4.$$

$$\bullet x + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i.$$

$$\bullet x + \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$S = \{1, -1, i, -i, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}.$$

437. 2^a espécie e grau ímpar: 1 é raiz.

1	-5	9	-9	5	-1	1
1	-4	5	-4	1	0	

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = 3.$$

$$\bullet x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\bullet x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$S = \left\{ 1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

439. 1ª espécie: -1 é raiz.

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -3 & 2 \\ \hline 2 & -5 & 2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array}$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{ -1, 2, \frac{1}{2} \right\}.$$

440. 1ª espécie: -1 é raiz.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array}$$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i$$

$$S = \{-1, i, -i\}.$$

441. $6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y^2 + 35y + 50 = 0 \Rightarrow y = -\frac{10}{3} \text{ ou } y = -\frac{5}{2}$$

$$\bullet x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3} \Rightarrow x = -3 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}$$

$$\bullet x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{3}, -3 \right\}.$$

442. a) $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0 \Rightarrow y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\bullet z + \frac{1}{z} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow z = \frac{-(1 - \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\bullet z + \frac{1}{z} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow z = \frac{-(1 + \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

b) Convém notar que $z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$, portanto as raízes de $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ são as raízes de $z^5 - 1 = 0$, exclusão feita à raiz $z = 1$. As raízes imaginárias da equação binômica $z^5 = 1$ são dadas por

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{2k\pi}{5} \text{ com } k \in \{1, 2, 3, 4\}$$

e essas raízes estão em P.G. de razão $q = \cos \frac{2\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{5}$,

pois os argumentos dos z_k estão em P.A. de razão $r = \frac{2\pi}{5}$; então:

$$z_{p+1} = z_p \cdot q \text{ para todo } p \in \{1, 2, 3\}.$$

Nota: Talvez seja interessante notar que:

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{(\sqrt{5} - 1) + i \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$z_2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{5} = \frac{-(\sqrt{5} + 1) + i \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$z_3 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{6\pi}{5} = \frac{-(\sqrt{5} + 1) - i \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$z_4 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{8\pi}{5} = \frac{(\sqrt{5} - 1) - i \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

443. 1ª espécie: -1 é raiz:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 1 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 & -5 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$y^4 - 5y^3 + 6y^2 - 5y + 1 = 0 \Rightarrow \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 5\left(y + \frac{1}{y}\right) + 6 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = 1$$

$$\bullet y + \frac{1}{y} = 4 \Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\bullet y + \frac{1}{y} = 1 \Rightarrow y = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \left\{-1, 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

444. $\frac{1 + x^4}{(1 + x)^4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y - 8 = 0 \Rightarrow y = 2 \pm 2\sqrt{3}$$

$$\bullet x + \frac{1}{x} = 2 + 2\sqrt{3} \Rightarrow x = (1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$$

$$\bullet x + \frac{1}{x} = 2 - 2\sqrt{3} \Rightarrow x = (1 - \sqrt{3}) \pm i\sqrt{2\sqrt{3} - 3}$$

$$S = \{(1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}, (1 - \sqrt{3}) \pm i\sqrt{2\sqrt{3} - 3}\}$$

445. Seja a P.G. $(a, aq, aq^2, aq^3, aq^4)$. Devemos ter:

$$\bullet a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 = 484$$

$$\bullet aq + aq^3 = 120$$

Então:

$$\frac{1 + q + q^2 + q^3 + q^4}{q + q^3} = \frac{484}{120} \text{ e daí}$$

$$30q^4 - 91q^3 + 30q^2 - 91q + 30 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 91\left(q + \frac{1}{q}\right) + 30 = 0 \Rightarrow 30x^2 - 91x - 30 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{10}{3} \text{ ou } x = -\frac{3}{10}$$

$$\bullet q + \frac{1}{q} = \frac{10}{3} \Rightarrow \left(q = 3 \text{ ou } q = \frac{1}{3}\right) \Rightarrow (a = 4 \text{ ou } a = 324)$$

$$\bullet q + \frac{1}{q} = -\frac{3}{10} \Rightarrow q \notin \mathbb{R}$$

P.G. $(4, 12, 36, 108, 324)$ ou $(324, 108, 36, 12, 4)$.

446. $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = \frac{2}{3}$$

$$\bullet x + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = \pm i$$

$$\bullet x + \frac{1}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 2i\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \left\{ i, -i, \frac{1 + 2i\sqrt{3}}{3}, \frac{1 - 2i\sqrt{3}}{3} \right\}$$

CAPÍTULO V — Raízes múltiplas e raízes comuns

452. $P(x) = 5x^3 + ax^2 + bx + c$

$$a) P(x) + k(x - 1)P'(x) + (x^2 - 1)P''(x) \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^3 + ax^2 + bx + c + k(x - 1)(15x^2 + 2ax + b) +$$

$$+ (x^2 - 1) \cdot (30x + 2a) \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (35 + 15k)x^3 + (3a + 2ak - 15k)x^2 + (b + bk - 2ak - 30)x +$$

$$+ (c - bk - 2a) \equiv 0,$$

$$\text{temos: } 35 + 15k = 0 \Rightarrow k = -\frac{7}{3}$$

b) Substituindo $k = -\frac{7}{3}$, nas equações abaixo, temos:

$$\bullet 3a + 2ak - 15k = 0 \Rightarrow a = 21.$$

$$\bullet b + bk - 2ak - 30 = 0 \Rightarrow b = 51.$$

$$\bullet c - kb - 2a = 0 \Rightarrow c = -77.$$

$$c) P(x) = 5x^3 + ax^2 + bx + c = 5x^3 + 21x^2 + 51x - 77$$

$$P(1) = 0 \Rightarrow P(x) = (x - 1) \cdot Q(x). \text{ Aplicando Briot:}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 21 & 51 & -77 & 1 \\ 5 & 26 & 77 & & 0 \end{array}$$

$$\text{Então: } Q(x) = 5x^2 + 26x + 77 \text{ e}$$

$$P(x) = (x - 1)(5x^2 + 26x + 77).$$

453. $P(x) = 3x^4 + 12x - 7 \Rightarrow P'(x) = 12x^3 + 12 \Rightarrow$
 $\Rightarrow P'(-1) = 12(-1)^3 + 12 = 0$ e, portanto,
 $P'(-1) = 0.$

454. $P(x) = (x - a) \cdot P'(x) \Rightarrow P'(x)$ é quociente da divisão de $P(x)$ por $x - a \Rightarrow$ coeficientes dominantes de $P(x)$ e $P'(x)$ são iguais (basta lembrar o dispositivo de Briot). Então:
 $a_n = n \cdot a_n$ e daí $a_n(n - 1) = 0 \Rightarrow n = 1.$

455. $a_n = 1$ e $a_0 = 2p - 1$ e o polinômio tem grau par, então:

$$\begin{cases} P(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + (2p - 1) \\ P'(x) = 2nx^{2n-1} + (2n - 1)a_{2n-1}x^{2n-2} + \dots + 2a_2x + a_1 \end{cases}$$

a) $P(0) = 2p - 1$ é um número ímpar.
b) $P(0) = 2p - 1 \neq 0$. Zero não é raiz de $P(x)$.
c) $\delta P'(x) = 2n - 1 \Rightarrow \delta P'(x)$ é ímpar.
d) O coeficiente do termo de maior grau do polinômio derivado é $2n$, logo é par.
e) O valor de $P(x)$, quando x é número par, é a soma de parcelas do tipo $a_i x^i$ com a_i inteiro. Essas parcelas são todas pares, com exceção da última $2p - 1$. Então a soma é diferente de zero.
Portanto, d é a afirmação falsa.

458. $f(x) = x^3 - 3x + 8 = 0.$
A equação tem raízes iguais se aceitar como raiz uma raiz de $f'(x) = 0$, então: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. $f(1) \neq 0$; $f(-1) \neq 0$ e, portanto, a equação não tem raízes iguais.

459. $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 8x - 3 = 0$
 $f^{(1)}(x) = 5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 14x + 8$
 $f^{(2)}(x) = 20x^3 - 24x + 18x - 14 \left(\text{raízes: } 1, \frac{1 \pm \sqrt{69}}{10} \right)$
 $f^{(3)}(x) = 60x^2 - 48x + 18 \left(\text{raízes: } \frac{4 \pm i\sqrt{14}}{10} \right)$
 $f^{(4)}(x) = 120x - 48 \left(\text{raiz: } \frac{2}{5} \right)$

• Se existir um número r tal que $f(r) = f^{(4)}(r) = 0$, então r tem multiplicidade 5. Mas $f(r) = f\left(\frac{2}{5}\right) \neq 0$.

• Se r for raiz de multiplicidade 4, então $f(x) = f^{(3)}(r) = 0$. Mas $f(x) = f\left(\frac{4 \pm i\sqrt{14}}{10}\right) \neq 0$.

• Se r for de multiplicidade 3, então $f(r) = f^{(2)}(r) = 0$.

$$f^{(3)}(x) = 0 \Rightarrow 20x^3 - 24x^2 + 18x - 14 = 0$$

Pesquisando as raízes, encontramos $f(1) = 0$.

$$\text{Checando: } f^{(1)}(1) = 5 - 8 + 9 - 19 + 8 = 0.$$

Logo, 1 é raiz tripla.

460. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$; $f^{(1)}(x) = 3x^2 - 10x + 8$;

$$f^{(2)}(x) = 6x - 10$$
; $f^{(3)}(x) = 6 \neq 0$

Se existir um número r tal que $f(r) = f^{(1)}(r) = f^{(2)}(r) = 0$ e $f^{(3)}(r) \neq 0$, teremos uma raiz tripla.

$$f^{(2)}(x) = 0 \Rightarrow 6x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}; \text{ mas } f\left(\frac{5}{3}\right) \neq 0.$$

$$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = \frac{4}{3}$$

$f(2) = 0$, então 2 é raiz dupla. Aplicando Briot:

1	-5	8	-4	2
1	-3	2	0	2
1	-1	0		

recaímos em $x - 1 = 0$; portanto, $S = \{1, 2\}$.

461. a) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 64 = 0$.

$$f^{(1)}(x) = 4x^3 - 36x^2 + 104x - 96$$

$$f^{(2)}(x) = 12x^2 - 72x + 104$$

$$f^{(3)}(x) = 24x - 72$$
; $f^{(4)}(x) = 24 \neq 0$. Temos, então:

$$f^{(3)}(x) = 0 \Rightarrow 24x - 72 = 0 \Rightarrow x = 3, \text{ mas } f(3) \neq 0.$$

$$f^{(2)}(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 72x + 104 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{3}}{3} \text{ e } f\left(\frac{9 \pm \sqrt{3}}{3}\right) \neq 0.$$

$$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 36x^2 + 104x - 96 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3 \text{ ou } x = 4$$

Testando essas raízes em $f(x)$, encontramos $f(2) = 0$ e $f(4) = 0$.

Portanto, 2 e 4 são raízes duplas.

b) $x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4 = 0$

$$f^{(1)}(x) = 5x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 2x + 8$$

$$f^{(2)}(x) = 20x^3 + 12x^2 - 30x - 2$$

$$f^{(2)}(x) = 0 \Rightarrow 20x^3 + 12x^2 - 30x - 2 = 0.$$

Uma das raízes da equação $f^{(2)}(x) = 0$ é 1.

Testando em $f(x)$ e $f^{(1)}(x)$, temos:

$f(1) = 0$ e $f^{(1)}(1) = 0$, então 1 é raiz tripla. Aplicando Briot-Ruffini:

1	1	-5	-1	8	-4	1
1	2	-3	-4	4	0	1
1	3	0	-4	0		1
1	4	4	0			

recaímos em $x^2 + 4x + 4 = 0$ e daí $x = -2$ com multiplicidade 2 e, portanto, 1 é raiz tripla e -2 é raiz dupla.

462. $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$.

$$f^{(1)}(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5$$

$$f^{(2)}(x) = 12x^2 - 6x - 6.$$

Se a equação admite uma raiz de multiplicidade 3, então deve existir um número r tal que $f(r) = f^{(1)}(r) = f^{(2)}(r) = 0$ e $f^{(3)}(r) \neq 0$. Então:

$$f^{(2)}(r) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}; f(1) = 0 \text{ e}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0. \text{ Assim, } 1 \text{ é raiz tripla. Aplicando Briot:}$$

1	-1	-3	5	-2	1
1	0	-3	2	0	1
1	1	-2	0		1
1	2	0			

recaímos em $x + 2 = 0$ e daí $x = -2$.

$$S = \{1, -2\}.$$

466. $x^3 - 3x^2 - 9x + \lambda = 0$

a) Se a equação admite uma raiz dupla, então existe um número r tal que $f(r) = f^{(1)}(r) = 0$ e $f^{(2)}(r) \neq 0$. Então:

$$f^{(1)}(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -1 \text{ e}$$

$$\bullet f(-1) = 0 \Rightarrow 5 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -5.$$

$$\bullet f(3) = 0 \Rightarrow -27 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 27.$$

467. Vamos supor que a equação $f(x) = x^4 + px^2 + q = 0$ tenha uma raiz r tripla. Então deveremos ter $f(r) = f^{(1)}(r) = f^{(2)}(r) = 0$ e $f^{(3)}(r) \neq 0$.

$$f^{(1)} = 4x^3 + 2px$$

$$f^{(2)}(x) = 12x^2 + 2p = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{p}{6} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{p}{6}}$$

Substituindo esse valor em $f(x) = 0$ e $f^{(1)}(x) = 0$, temos:

$$\left(\pm\sqrt{-\frac{p}{6}}\right)^4 + p\left(\pm\sqrt{-\frac{p}{6}}\right)^2 + q = 0 \Rightarrow 5p^2 = 36q$$

$$4\left(\pm\sqrt{-\frac{p}{6}}\right)^3 + 2p\left(\pm\sqrt{-\frac{p}{6}}\right) = 0 \Rightarrow p = 0.$$

Portanto, a condição para a existência de uma raiz tripla é $p = q = 0$ (absurdo).

468. $f(x) = x^3 + px + q = 0$; $f^{(1)}(x) = 3x^2 + p$; $f^{(2)}(x) = 6x$; $f^{(3)}(x) = 6$.

Então, se existir um número r tal que:

a) $f(r) = f^{(1)}(r) = f^{(2)}(r) = 0$, teremos uma raiz tripla, ou seja:

$$f^{(2)}(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow q = 0 \text{ e } f^{(1)}(0) = 0 \Rightarrow p = 0$$

b) $f(r) = f^{(1)}(r) = 0$ e $f^{(2)}(r) \neq 0$, teremos uma raiz dupla, ou seja:

$$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + p = 0 \Rightarrow x = \pm i \frac{\sqrt{3p}}{3}$$

$$f\left(i \frac{\sqrt{3p}}{3}\right) = 0 \Rightarrow \left(i \frac{\sqrt{3p}}{3}\right)^3 + p\left(i \frac{\sqrt{3p}}{3}\right) + q = 0 \Rightarrow 2ip\sqrt{3p} = -9q \\ \Rightarrow (2ip\sqrt{3p})^2 = (-9q)^2 \Rightarrow 4p^3 + 27q^2 = 0.$$

Analogamente,

$$f\left(-i \frac{\sqrt{3p}}{3}\right) = 0 \Rightarrow 4p^3 + 27q^2 = 0$$

469. $f(x) = x^3 - px - q = 0$. $f^{(1)}(x) = 3x^2 - p$; $f^{(2)}(x) = 6x$.

Se existir um número r tal que $f(r) = f^{(1)}(r) = 0$ e $f^{(2)}(r) \neq 0$, teremos uma raiz dupla. Então:

$$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - p = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3p}}{3}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3p}}{3}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3p}}{3}\right)^3 - p\left(\frac{\sqrt{3p}}{3}\right) - q = 0 \Rightarrow -2p\sqrt{3p} = 9q \Rightarrow \\ \Rightarrow (-2p\sqrt{3p})^2 = (9q)^2 \Rightarrow 4p^3 = 27q^2 \Rightarrow 4p^3 - 27q^2 = 0.$$

Analogamente,

$$f\left(-\frac{\sqrt{3p}}{3}\right) = 0 \Rightarrow 4p^3 - 27q^2 = 0$$

470. $x^3 - 2x^2 + x + m - 1 = 0$. $f^{(1)}(x) = 3x^2 - 4x + 1$; $f^{(2)}(x) = 6x - 4$.

Se existir um número r tal que $f(r) = f^{(1)}(r) = 0$ e $f^{(2)}(r) \neq 0$, teremos uma raiz dupla. Então:

$$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{3}.$$

$$\bullet f(1) = 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1; f^{(2)}(1) = 2 \neq 0$$

$$\bullet f\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow 27m - 23 = 0 \Rightarrow m = \frac{23}{27}; f^{(2)}\left(\frac{1}{3}\right) = -2 \neq 0.$$

471. $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 1 = 0$. $f^{(1)}(x) = 3x^2 + 2ax + 3$;

$$f^{(2)}(x) = 6x + 2a; f^{(3)}(x) = 6 \neq 0.$$

Se existir um número r tal que $f(r) = f^{(1)}(r) = f^{(2)}(r) = 0$ e $f^{(3)}(r) \neq 0$, teremos uma raiz tripla, ou seja:

$$f^{(2)}(x) = 0 \Rightarrow 6x + 2a = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{3} \quad (1)$$

$$f^{(1)}\left(-\frac{a}{3}\right) = 0 \Rightarrow -a^2 + 9 = 0 \Rightarrow a = \pm 3 \quad (2)$$

$$f\left(-\frac{a}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2a^3 - 27a + 27 = 0 \Rightarrow a = 3 \text{ ou } a = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}}{2}$$

De (1) e (2), $a = 3$.

472.

$$x^4 - px - q = 0; f^{(1)}(x) = 4x^3 - p; f^{(2)}(x) = 12x^2.$$

Se existir um número r tal que $f(r) = f^{(1)}(r) = 0$ e $f^{(2)}(r) \neq 0$, teremos uma raiz dupla. Então:

$$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - p = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{p}{4}}.$$

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{p}{4}}\right) = 0 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{p}{4}}\right)^4 - p \cdot \sqrt[3]{\frac{p}{4}} - q = 0 \Rightarrow \left(-3p \cdot \sqrt[3]{\frac{p}{4}}\right)^3 = (4q)^3 \Rightarrow 27p^4 + 256q^3 = 0 \text{ e, portanto, } 27p^4 + 256q^3 = 0 \text{ é a condição do problema e } x = \sqrt[3]{\frac{p}{4}} \text{ é a raiz.}$$

473.

$$f(x) = x^4 + mx^2 + 8x - 3 = 0; f^{(1)}(x) = 4x^3 + 2mx + 8;$$

$$f^{(2)}(x) = 12x^2 + 2m; f^{(3)}(x) = 24x.$$

Se existir um número r tal que $f(r) = f^{(1)}(r) = f^{(2)}(r) = 0$ e $f^{(3)}(r) \neq 0$, teremos uma raiz tripla. Então:

$$f^{(2)}(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 + 2m = 0 \Rightarrow x = \pm i \frac{\sqrt{6m}}{6}$$

$$\bullet f^{(1)}\left(i \frac{\sqrt{6m}}{6}\right) = 0 \Rightarrow 4\left(i \frac{\sqrt{6m}}{6}\right)^3 + 2mi \frac{\sqrt{6m}}{6} + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mi\sqrt{6m} = -36 \Rightarrow m^3 = -6^3 \Rightarrow m = -6.$$

Analogamente,

$$f\left(-i \frac{\sqrt{6m}}{6}\right) = 0 \Rightarrow m = -6.$$

$$\text{Temos: } x = \pm i \frac{\sqrt{6m}}{6} = \pm 1 \text{ e } f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0.$$

• $f(1) = 0$ e $f(-1) \neq 0$. Aplicando Briot:

1	0	-6	8	-3	1
1	1	-5	3	0	1
1	2	-3	0		1
1	3	0			

recaímos em $x + 3 = 0$ e daí $x = -3$ e, portanto,

$$S = \{1, -3\} \text{ e } m = -6.$$

- 474.** $f(x) = x^3 + mx - 2 = 0$; $f^{(1)}(x) = 3x^2 + m$; $f^{(2)}(x) = 6x$.
Se existir um número r tal que $f(r) = f^{(1)}(r) = 0$ e $f^{(2)}(r) \neq 0$, teremos uma raiz dupla. Então:

$$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + m = 0 \Rightarrow x = \pm i \cdot \frac{\sqrt{3m}}{3}$$

$$f\left(i \frac{\sqrt{3m}}{3}\right) = 0 \Rightarrow \left(i \frac{\sqrt{3m}}{3}\right)^3 + m i \frac{\sqrt{3m}}{3} - 3 = 0.$$

$$(mi\sqrt{3m})^2 = 9^2 \Rightarrow m = -3 \Rightarrow x = \pm 1; f(x) = x^3 - 3x - 2;$$

$f(1) \neq 0$ e $f(-1) = 0$. Aplicando Briot:

1	0	-3	-2	-1	
1	-1	-2	0	-1	
1	-2	0			

recaímos em $x - 2 = 0$ ou $x = 2$. Portanto, $S = \{-1, 2\}$.

- 475.** $ax^n + b = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Vamos supor que a equação admita uma raiz dupla r .

Temos $f(x) = 0$ e $f^{(1)}(x) = 0$. Então:

- $f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow nax^{n-1} = 0 \Rightarrow x = 0$, pois $a \neq 0$.

- $f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^n + b = 0 \Rightarrow b = 0$, o que é absurdo, pois $b \neq 0$.

Portanto, a equação não tem raízes múltiplas.

- 476.** $x^3 - ax + b = 0$, $ab \neq 0$.

Seja r a raiz dupla. Então: $f(r) = f^{(1)}(r) = 0$ e $f^{(2)}(r) \neq 0$.

$$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - a = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3a}}{3}.$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)^3 - a \cdot \frac{\sqrt{3a}}{3} + b = 0 \Rightarrow 2a\sqrt{3a} = 9b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a^3 - 27b^2 = 0 \text{ e, portanto, } a \text{ é positivo.}$$

- 477.** $3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 24x + k = 0$.

Seja r a raiz dupla. Então: $f(r) = f^{(1)}(r) = 0$. Temos:

$$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = 2.$$

$$f(-1) = 0 \text{ (condição do problema)} \Rightarrow k - 19 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 19 \text{ e } 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 19 = 0. \text{ Aplicando Briot:}$$

3	-8	-6	24	19	-1	
3	-11	5	19	0	-1	
3	-14	19	0			

$$\text{recaímos em } 3x^2 - 14x + 19 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm 2i\sqrt{2}}{3}.$$

$$S = \left\{-1, \frac{7 + 2i\sqrt{2}}{3}, \frac{7 - 2i\sqrt{2}}{3}\right\}.$$

478. a) Ver item 91, página 111.

b) $f(x) = 2x^3 - \sin \alpha x^2 + \cos^3 \alpha = 0$

$f^{(1)}(x) = 6x^2 - 2 \sin \alpha x$

Se f tiver uma raiz múltipla r , então $f(r) = f^{(1)}(r) = 0$.

Então:

$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 2 \sin \alpha x = 0 \Rightarrow x(x - \sin \alpha) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = \sin \alpha$

• $f(0) = 0 \Rightarrow \cos^3 \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

• $f(\sin \alpha) = 0 \Rightarrow -\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) Se $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, vimos que a equação

admite uma raiz dupla e, em consequência, uma terceira raiz simples.

Se $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a equação terá três raízes simples.

479. A) $z = x + iy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (1)

$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \Rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$ (2)

$1 - z = (1 - x) - iy \Rightarrow |1 - z| = \sqrt{(1 - x)^2 + y^2}$ (3)

Temos:

de (1) e (3): $(1 - x)^2 + y^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

de (1) e (2): $\frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Portanto: $z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B) $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$; $P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

• $P(x)$ é divisível por $P'(x)$:

x^3	+	ax^2	+	bx	+	c	$3x^2 + 2ax + b$
$-x^3$	-	$\frac{2ax^2}{3}$	-	$\frac{bx}{3}$			$\frac{x}{3} + \frac{a}{9}$
		$\frac{ax^2}{3}$	+	$\frac{2bx}{3}$	+	c	
	-	$\frac{ax^2}{3}$	-	$\frac{2a^2x}{9}$	-	$\frac{ab}{9}$	
						$\frac{6b + 2a^2}{9}x$	$+\frac{9c - ab}{9}$

$$(6b - 2a^2)x + 9c - ab = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6b - 2a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 3b & (1) \\ 9c - ab = 0 & (2) \end{cases}$$

• $P'(x)$ é divisível por $x - 1$:

3	2a	b	1
3	2a + 3	2a + b + 3	

$$2a + b + 3 = 0 \quad (3)$$

De (1), (2) e (3), temos que: $a = -3$, $b = 3$ e $c = -1$.

480. Seja k_i o coeficiente do termo em x^{180-i} .

Temos:

$$k_i = (\sin 1^\circ + \cos 1^\circ)(\sin 2^\circ + \cos 2^\circ) \dots (\sin i^\circ + \cos i^\circ).$$

Desta forma, para $i \geq 135$, um dos fatores que compõem k_i é $\sin 135^\circ + \cos 135^\circ = 0$, ou seja, $k_i = 0$. Então os termos que têm coeficiente não nulo vão desde x^{180} até $x^{180-134} = x^{46}$.

Conclusão: a multiplicidade de zero como raiz do polinômio é 46.

481.

	$x + 6$	$\frac{x}{20} - \frac{3}{20}$
$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$	$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$	$20x^2 + 20x - 40 = r_1$
$\underbrace{20x^2 + 20x - 40}_{r_1}$	0	

$$\text{mdc}(f, g) = \text{mdc}(g, r_1) = \frac{1}{20}r_1 = x^2 + x - 2$$

482.

	$x^2 - 2x + 4$	
$x^6 + 2x^5 + x^3 + 3x^2 + 3x + 2$	$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2$	
$\underbrace{-6x^3 - 13x^2 + 3x + 10}_{r_1}$		

	$-\frac{x}{6} - \frac{11}{36}$	
$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2$	$-6x^3 - 13x^2 + 3x + 10 = r_1$	
$\underbrace{\frac{19}{36}x^2 + \frac{19}{12}x + \frac{19}{18}}_{r_2}$		

	$-\frac{216}{19}x + \frac{180}{19}$
$-6x^3 - 13x^2 + 3x + 10$	$\frac{19}{36}x^2 + \frac{19}{12}x + \frac{19}{18} = r_2$
0	

$$\text{mdc}(f, g) = \text{mdc}(r_1, r_2) = \frac{36}{19}r_2 = x^2 + 3x + 2.$$

483. $f = (x^2 - 1)^2 \cdot (x + 1)^3 = (x - 1)^2 \cdot (x + 1)^5$
 $g = (x^3 + 1)(x - 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)$, então
 $\text{mdc}(f, g) = (x + 1)(x - 1)$.

484. Sejam q_1 e q_2 os quocientes da divisão, respectivamente, de f e g por $(x - a)^p$; q e r o quociente e o resto da divisão de f por g . Então:
 $f = q_1 \cdot (x - a)^p$; $g = q_2 \cdot (x - a)^p$; $f = qg + r \Rightarrow$
 $\Rightarrow r = f - qg = q_1(x - a)^p - qq_2(x - a)^p =$
 $= (x - a)^p(q_1 - qq_2)$ e, portanto, o resto da divisão de f por g também é divisível por $(x - a)^p$.

485. $f = 5(x - 2)^2(x - 4)^2(x - 3)^4$
 $g = 4(x - 2)(x - 4)^4(x + 1)$
 $\text{mdc}(f, g) = (x - 2)(x - 4)^2$.

486. $f = (x^2 - 1)^3(x + 1)^2 = (x - 1)^3(x + 1)^5$
 $g = (x - 1)^4(x + 1)^4$
 $\text{mdc}(f, g) = (x - 1)^3(x + 1)^4$.

488.

	$x + 6$	$\frac{x}{20} - \frac{3}{20}$
$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$	$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$	$20x^2 + 20x - 40$
$20x^2 + 20x - 40$	0	

Então, $\text{mdc}(f, g) = x^2 + x - 2$ e as raízes comuns a f e g são 1 e -2 .
 $f(3) = 0$; $f(3) \neq 0$, $g(-1) \neq 0$ e $f(-1) = 0$; portanto, as raízes não comuns são: -1 de f e 3 de g .

489. $f = x^3 - ax^2 - b^2x + ab^2 = (x^2 - b^2)(x - a) = (x + b)(x - b)(x - a)$
 $g = x^3 + bx^2 - a^2x - a^2b = (x^2 - a^2)(x + b) = (x + a)(x - a)(x + b)$
 Temos, então: $\text{mdc}(f, g) = (x - a)(x + b)$ e, portanto, as raízes comuns são a e $-b$.

- 490.** $f = x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$
 $g = x(x^2 + 1)$
 $h = x^4 - x^3 + x^2 - x = x(x^2 + 1)(x - 1)$
 Então, $\text{mdc}(f, g, h) = x^2 + 1$.
 Raízes comuns: i e $-i$ (raízes do mdc).
- 491.** As raízes de $g(x) = x^2 - 3x + 2$ são 1 e 2.
 Impondo que sejam raízes de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + a$, temos:
 $f(1) = 0 \Rightarrow 1 - 3 - 4 + a = 0 \Rightarrow a = 6$
 $f(2) = 0 \Rightarrow 8 - 12 - 8 + a = 0 \Rightarrow a = 12$
 Conclusão: $a = 6$ ou $a = 12$.
- 492.** $P(x) = x^n = a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$
 $Q(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1} = P'(x)$
 Se $\text{mdc}(P(x), Q(x)) = x - \alpha$, então α é raiz de $P(x)$ e de $Q(x)$; portanto, α pode ser raiz dupla de $P(x)$.
- 493.** Seja $f = x^{14} - 2x^{13} + x^{12}$ e $g = x^2 - 1$. Então:
 $f = x^{12}(x - 1)^2$
 $g = (x + 1)(x - 1)$
 $\text{mmc}(f, g) = x^{12}(x - 1)^2(x + 1) = x^{15} - x^{14} - x^{13} + x^{12}$
 $\text{mdc}(f, g) = x - 1$.
- 494.** $f = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$
 $g = (x - 1)^2$
 $h = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$
 Então:
 $\text{mmc}(f, g, h) = (x + 1)(x - 1)^2(x^2 + x + 1)$
 $\text{mdc}(f, g, h) = x - 1$.
- 497.**
$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{2(x+1) + 3(x-1) - 1}{(x-1)(x+1)} = \frac{5x-2}{x^2-1}$$
- 501.**
$$\frac{1}{x^2+2x+1} + \frac{3x-3}{x^2-1} - \frac{2x+4}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+1}$$

$$\frac{1 + 3(x+1) - 2(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$
- 502.**
$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)^3} + \frac{1}{(x-1)^3(x-2)^2} = 0$$

 Multiplicando ambos os membros por $(x-1)^3(x-2)^3$, temos:
 $(x-1) + (x-2) = 0$
 $2x - 3 = 0$
 $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$.

504. $\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{(x + 1)} \quad (x \neq \pm 1)$
 Então: $\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{a(x + 1)}{x^2 - 1} = \frac{b(x - 1)}{x^2 - 1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{(a + b)x + (a - b)}{x^2 - 1} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = \frac{1}{2}$

505. $\frac{1}{(x - 1)(x^2 + 1)} \equiv \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \equiv$
 $\equiv \frac{(A + B)x^2 + (C - B)x + (A - C)}{(x - 1)(x^2 + 1)}$. Então:
 $\begin{cases} A + B = 0 \\ C - B = 0 \\ A - C = 1 \end{cases}$
 Resolvendo o sistema de equações, temos: $A = \frac{1}{2}$; $B = C = -\frac{1}{2}$.

506. $\frac{x}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{\alpha}{x + 1} + \frac{\beta}{x - 1} + \frac{(\alpha + \beta)x + (\beta - \alpha)}{(x + 1)(x - 1)}$
 Temos:
 $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

507. a, b, c são raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$, então $a = 0$; $b = 2$ e $c = 3$.

$$\frac{6 - 5x}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{A}{x - 0} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3} =$$

$$= \frac{(A + B + C)x^2 - (5A + 3B + 2C)x + 6A}{x^3 - 5x^2 + 6x}$$

Temos:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -(5A + 3B + 2C) = -5 \\ 6A = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações encontramos: $A = 1$; $B = 2$ e $C = -3$. Portanto, alternativa c.

508. $\frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{A}{2n - 1} + \frac{B}{2n + 1} + \frac{(2A + 2B)n + (A - B)}{(2n - 1)(2n + 1)}$
 decorre $2A + 2B = 0$ e $A - B = 1$. Resolvendo esse sistema, vem
 $A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$. Vale, portanto, a identidade:

$$\frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{1}{2(2n - 1)} - \frac{1}{2(2n + 1)}$$

Aplicação:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} = \dots = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{14}\right) + \left(\frac{1}{14} - \frac{1}{18}\right) + \dots + \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}
 \end{aligned}$$

Para n arbitrariamente grande, $\frac{1}{2(2n+1)}$ tende a zero e S tende a $\frac{1}{2}$.

509. $f = x^3 - 2x^2 + 1; g = x^2 + x - 2$

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 2x^2 \quad + 1 \quad \Big| x^2 + x - 2 \\
 \underline{-x^3 - x^2 + 2x} \\
 -3x^2 + 2x + 1 \\
 \underline{3x^2 + 3x - 6} \\
 5x - 5 = r(x)
 \end{array}$$

Temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x)}{g(x)} &= q(x) + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} - q(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{r(x)}{g(x)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x + 2A - B}{x^2 + x - 2} \\
 &\quad \begin{cases} A + B = 5 \\ 2A - B = -5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema: $A = 0$ e $B = 5$ e, portanto, o valor de B é 5.

510. $P(x) = a(x - x_0)(x - x_1)$ com $x_1 \neq x_0$
 $Q(x) = a'(x - x_0)(x - x_2)$ com $x_2 \neq x_0$

Pelas relações de Girard, temos:

$$x_0 + x_1 = -\frac{b}{a} \text{ e } x_0 + x_2 = -\frac{b'}{a'}$$

e decorre daí:

$$x_1 = -\frac{b}{a} - x_0 \text{ e } x_2 = -\frac{b'}{a'} - x_0.$$

Temos, então:

$$P(x) = a(x - x_0)\left(x + \frac{b}{a} + x_0\right)$$

$$Q(x) = a'(x - x_0)\left(x + \frac{b'}{a'} + x_0\right)$$

$$\text{mmc}(P, Q) = (x - x_0)\left(x + \frac{b}{a} + x_0\right)\left(x + \frac{b'}{a'} + x_0\right).$$

- 511.** Vimos no item 89, na página 107, que todo polinômio pode ser colocado na forma de um produto de fatores do 1º grau. Então vamos escrever f e g como produtos de fatores da forma $x - r_i$, em que r_i é raiz do polinômio f com multiplicidade m_i e de g com multiplicidade n_i :
- $$f = (x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2}(x - r_3)^{m_3} \dots (x - r_p)^{m_p}$$
- $$g = (x - r_1)^{n_1}(x - r_2)^{n_2}(x - r_3)^{n_3} \dots (x - r_p)^{n_p}$$
- Temos:
- $$\text{mdc}(f, g) = (x - r_1)^{\alpha_1}(x - r_2)^{\alpha_2}(x - r_3)^{\alpha_3} \dots (x - r_p)^{\alpha_p} \text{ em que}$$
- $$\alpha_i = \min\{m_i, n_i\}$$
- $$\text{mmc}(f, g) = (x - r_1)^{\beta_1}(x - r_2)^{\beta_2}(x - r_3)^{\beta_3} \dots (x - r_p)^{\beta_p} \text{ em que}$$
- $$\beta_i = \max\{m_i, n_i\}$$
- então $f \cdot g$ e $\text{mdc}(f, g) \cdot \text{mmc}(f, g)$ são produtos formados por fatores do tipo $(x - r_i)^{m_i + n_i}$, idênticos dois a dois, e portanto iguais.

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR é uma coleção consagrada ao longo dos anos por oferecer ao estudante o mais completo conteúdo de Matemática elementar. Os volumes estão organizados da seguinte forma:

VOLUME 1	conjuntos, funções
VOLUME 2	logaritmos
VOLUME 3	trigonometria
VOLUME 4	sequências, matrizes, determinantes, sistemas
VOLUME 5	combinatória, probabilidade
VOLUME 6	complexos, polinômios, equações
VOLUME 7	geometria analítica
VOLUME 8	limites, derivadas, noções de integral
VOLUME 9	geometria plana
VOLUME 10	geometria espacial
VOLUME 11	matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva

A coleção atende a alunos do ensino médio que procuram uma formação mais aprofundada, estudantes em fase pré-vestibular e também universitários que necessitam rever a Matemática elementar.

Os volumes contêm teoria e exercícios de aplicação, além de uma seção de questões de vestibulares, acompanhadas de respostas. Há ainda uma série de artigos sobre história da Matemática relacionados aos temas abordados.

Na presente edição, a seção de questões de vestibulares foi atualizada, apresentando novos testes e questões dissertativas selecionados a partir dos melhores vestibulares do país.