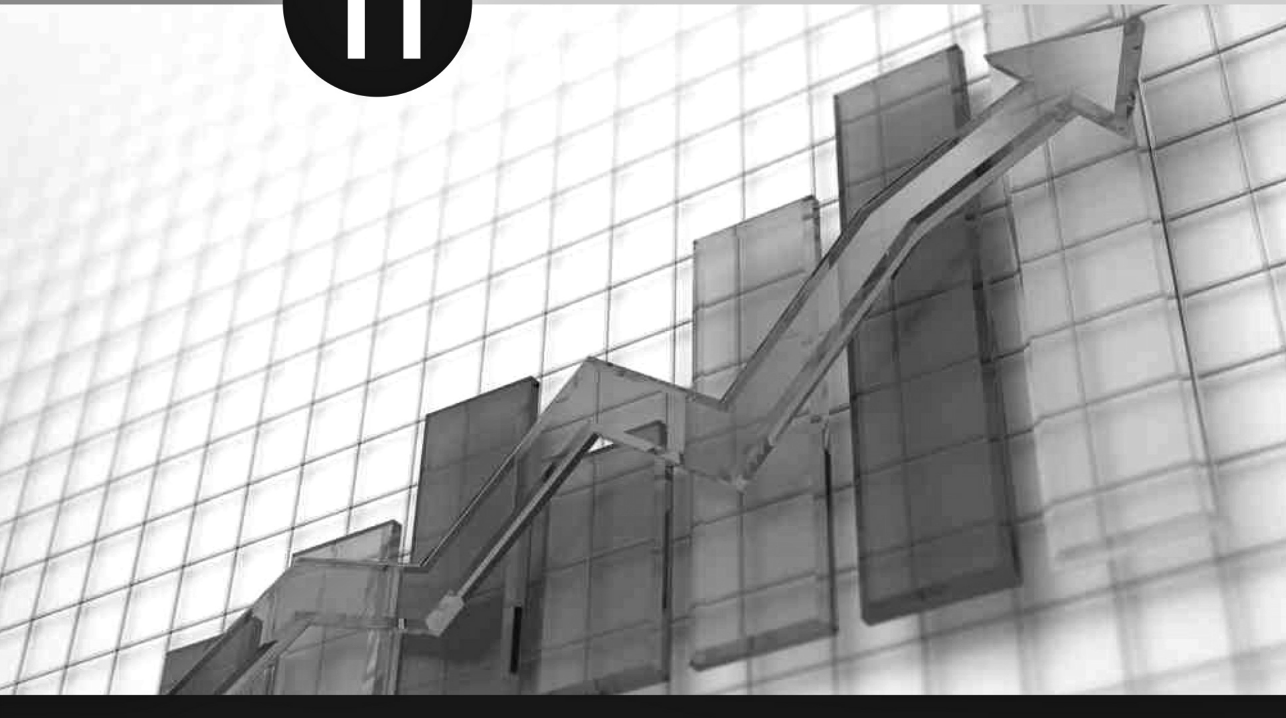
GELSON IEZZI
SAMUEL HAZZAN
DAVID DEGENSZAJN

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Matemática comercial
Matemática financeira
Estatística descritiva

11



Atual Editora

RESOLUÇÕES

GELSON IEZZI
SAMUEL HAZZAN
DAVID MAURO DEGENSZAJN

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Matemática comercial

Matemática financeira

Estatística descritiva

11

COMPLEMENTO PARA O PROFESSOR

2ª edição | São Paulo – 2013

Atual Editora

Copyright desta edição:
SARAIVA S.A. Livreiros Editores, São Paulo, 2013.
Rua Henrique Schaumann, 270 — Pinheiros
05413-010 — São Paulo — SP
Fone: (0xx11) 3611-3308 — Fax vendas: (0xx11) 3611-3268
SAC: 0800-0117875
www.editorasaraiva.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Iezzi, Gelson

Fundamentos de matemática elementar, 11 : matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva / Gelson Iezzi, Samuel Hazzan, David Mauro Degenszajn. — 2. ed. — São Paulo : Atual, 2013.

ISBN 978-85-357-1760-0 (aluno)
ISBN 978-85-357-1761-7 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Matemática (Ensino médio) — Problemas e exercícios, etc. I. Hazzan, Samuel. II. Degenszajn, David Mauro. III. Título.

13-01119 CDD-510.7

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

Complemento para o Professor — Fundamentos de Matemática Elementar — vol. 11

Gerente editorial: Lauri Cericato
Editor: José Luiz Carvalho da Cruz
Editores-assistentes: Fernando Manenti Santos/Alexandre da Silva Sanchez/Guilherme Reghin Gaspar/Juracy Vespucci
Auxiliares de serviços editoriais: Daniella Haidar Pacifico/Margarete Aparecida de Lima/Rafael Rabaçallo Ramos/Vanderlei Aparecido Orso
Digitação de originais: Margarete Aparecida de Lima
Revisão: Pedro Cunha Jr. e Lilian Semenichin (coords.)/Renata Palermo/Rhennan Santos/Felipe Toledo/Luciana Azevedo/Patricia Cordeiro/Eduardo Sigrist/Aline Araújo/Maura Loria
Gerente de arte: Nair de Medeiros Barbosa
Supervisor de arte: Antonio Roberto Bressan
Projeto gráfico: Carlos Magno
Capa: Homem de Melo & Tróia Design
Imagem de capa: Fry Design Ltd/Getty Images
Diagramação: TPG
Encarregada de produção e arte: Grace Alves
Coordenadora de editoração eletrônica: Silvia Regina E. Almeida

Produção gráfica: Robson Cacau Alves
Impressão e acabamento:

731.363.002.003

Editora Saraiva

SAC 0800-0117875
De 2ª a 6ª, das 8h30 às 19h30
www.editorasaraiva.com.br/contato

Rua Henrique Schaumann, 270 – Cerqueira César – São Paulo/SP – 05413-909

Apresentação

Este livro é o Complemento para o Professor do volume 11, Matemática Comercial, Matemática Financeira e Estatística Descritiva, da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar*.

Cada volume desta coleção tem um complemento para o professor, com o objetivo de apresentar a solução dos exercícios mais complicados do livro e sugerir alguns encaminhamentos aos alunos.

É nossa intenção aperfeiçoar continuamente os complementos. Estamos abertos às sugestões e críticas, que nos devem ser encaminhadas por intermédio da Editora.

Agradecemos à professora Erileide Maria de Sobral Souza a colaboração na redação das soluções que são apresentadas neste *Complemento*.

Os Autores.

Sumário

CAPÍTULO I — Matemática comercial

2. Seja *p* o preço do produto na data 0; o preço na data *t* será 3p. Assim:

a) a razão entre o preço na data *t* e o preço na data 0 será $\frac{3p}{p} = 3$.

b) a razão entre o aumento de preço ocorrido entre as duas datas e o preço na data 0 será $\frac{3p - p}{p} = 2$.

5. Temos:

- álcool consumido pelo carro de Antônio: $\frac{320}{8} = 40$ litros;
- dinheiro gasto por Antônio: $(40) \cdot (1{,}14) = 45{,}60$ reais;
- gasolina consumida pelo carro de José: $\frac{45{,}60}{1{,}60} = 28{,}50$ litros;
- quilômetros percorridos por José: $(28{,}5) \cdot (12) = 342$ quilômetros.

10. Seja *x* a quantia recebida por A, em milhares de reais. A quantia recebida por B será 350 – x, também em milhares de reais. De acordo com o enunciado, devemos ter:

$$\frac{x}{350 - x} = \frac{4}{3}$$

Igualando-se os produtos cruzados:

$3x = 1400 - 4x \Rightarrow 7x = 1400 \Rightarrow x = 200$

A = R$ 200 000,00; B = R$ 150 000,00

15. Seja *x* a renda mensal da família. De acordo com o enunciado:

$$\frac{7}{9}x + 800 = x$$

Resolvendo-se a equação: $800 = \frac{2}{9}x \Rightarrow x = 3600$

16. a) Seja *x* o valor da bolsa.

O estudante A gastou $\frac{4}{5}x$, ficando portanto com $\frac{1}{5}x$.

O estudante B gastou $\frac{5}{6}x$, ficando portanto com $\frac{1}{6}x$.

De acordo com o enunciado, $\frac{1}{5}x - \frac{1}{6}x = 8$.

Portanto, $6x - 5x = 240 \Rightarrow x = 240$.

b) O estudante A economizou $\frac{1}{5}(240) = 48$, e o estudante B economizou $\frac{1}{6}(240) = 40$.

18. Seja *x* o investimento em segurança pública. De acordo com o enunciado, o investimento em educação seria 2x e o investimento em saúde seria $\frac{2}{3}(2x) = \frac{4}{3}x$.

Além disso, $x + 2x + \frac{4}{3}x = 169$.

Resolvendo-se a equação acima: $9x + 4x = 507 \Rightarrow x = 39$

Dessa forma, o investimento em educação seria $2(39) = 78$, e o investimento em saúde seria $\frac{4}{3}(39) = 52$.

22. Seja *x* a renda se ele trabalhar 65 horas. Se a renda é diretamente proporcional ao número de horas trabalhadas, então:

$$\frac{x}{65} = \frac{600}{20}$$

Portanto: $20x = 39\,000 \Rightarrow x = 1950$

27. Sejam *a*, *b* e *c* os lucros recebidos pelos sócios A, B e C, respectivamente. Então:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2} = \frac{c}{5} = k$$

Consequentemente:

$$\begin{cases} a = 3k \text{ (I)} \\ b = 2k \text{ (II)} \\ c = 5k \text{ (III)} \end{cases}$$

Como A recebeu R$ 50 mil a mais que B, então:

$a - b = 50$ ou, ainda, $3k - 2k = 50 \Rightarrow k = 50$

De (I), $a = 150$.

De (II), $b = 100$.

De (III), $c = 250$.

30. Sejam P_0 e V_0 a pressão e o volume iniciais e P_1 e V_1 a pressão e o volume finais. Como $P_1 = P_0 + \frac{1}{5}P_0 = \frac{6}{5}P_0$ e, levando em conta que pressão e volume são inversamente proporcionais, temos:

$$P_0 \cdot V_0 = P_1 \cdot V_1$$

$$P_0 \cdot V_0 = \frac{6}{5}P_0 \cdot V_1$$

$$V_1 = \frac{5}{6}V_0$$

Portanto, o volume diminuirá em $V_0 - \frac{5}{6}V_0 = \frac{1}{6}V_0$, ou seja, diminuirá em $\frac{1}{6}$ de seu valor.

33. Como *y* é diretamente proporcional a x^2, então:

$$\frac{10}{4^2} = \frac{y}{5^2} \Rightarrow y = \frac{250}{16} = \frac{125}{8}$$

34. Como *y* é inversamente proporcional ao cubo de *x*, então:

$$100(4^3) = y \cdot (5^3) \Rightarrow y = \frac{6\,400}{125} = \frac{256}{5}$$

35. a) $xy = k_1$ e $yz = k_2$

Dividindo membro a membro essas relações, obtemos:

$$\frac{x}{z} = \frac{k_1}{k_2} = k$$

Portanto, *x* e *z* são diretamente proporcionais. (V)

b) $\frac{y}{x} = k_1$ e $zw = k_2$

Dividindo membro a membro essas relações, obtemos:

$$\frac{\frac{y}{x}}{zw} = \frac{k_1}{k_2} \Rightarrow \frac{\frac{y}{w}}{xz} = k$$

Portanto, $\frac{y}{w}$ e xz são diretamente proporcionais. (V)

c) $\frac{x_1}{y_1} = k = \frac{x_2}{y_2}$

Igualando os produtos cruzados, temos: $x_2y_1 = x_1y_2$. (V)

d) A área de um hexágono regular de lado de medida ℓ é igual à soma das áreas de 6 triângulos equiláteros de lado de medida ℓ.

A altura de um triângulo equilátero de lado ℓ é $h = \ell \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Portanto, sua área vale: $\frac{1}{2} \cdot \ell^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \ell^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Assim, a área *a* do hexágono regular de lado ℓ é $6\ell^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Portanto, é falso que a área *a* e o lado ℓ sejam diretamente proporcionais. (F)

38. a) Temos:

- 100 casais correspondem a 100 homens e 100 mulheres.
- 30% de 300, que dá 90, foram vendidos para mulheres e, portanto, 210 foram vendidos para homens.
- O total de homens é $100 + 210 = 310$ e o de mulheres é $100 + 90 = 190$.
- Portanto, o percentual de mulheres na festa é $\frac{190}{500} = 0{,}38 = 38\%$.

b) Seja *x* o número de ingressos a mais vendidos para as mulheres.

Devemos ter: $190 + x = 310 \Rightarrow x = 120$

39. Temos:

- número de crianças fora da escola: 0,15 N;
- $\frac{5}{9}$ das que estão fora da escola devem passar a frequentá-la;
- $\frac{4}{9}$ das que estão fora da escola continuarão fora.

Portanto:

$$\frac{4}{9}(0{,}15N) = 1\,200 \Rightarrow N = 18\,000$$

$$\frac{N}{250} = \frac{18\,000}{250} = 72$$

42. A área total do terreno é (400)(500) = 200 000 m^2.
A área do lote destinado a cada família é (20)(20) = 400 m^2.
Como 20% da área total será área de lazer, 80% será destinada à habitação.
Assim, chamando de *x* o número de famílias que podem ser alocadas, teremos:

$400x = (0{,}80)(200\,000)$. Portanto: $x = \frac{160\,000}{400} = 400$

44. a) No ano 2000, 10 000 dólares valem 10 000(1,60) = 16 000 reais. Assim, o imposto a ser pago é:
$0{,}175(16\,000 - 10\,000) = 1\,050$ reais

b) Considerando que o salário pedido seja o máximo não sujeito ao imposto, sabemos que ele vale R$ 10 000,00, o que corresponde a $\frac{10\,000}{1{,}6} = 6\,250$ dólares.

47. Antes dos reajustes, P = 0,25S (I), em que P é a prestação e S o salário.
Após os reajustes, a prestação passou a ser 1,26P e o salário, 1,05S. Portanto, a porcentagem que a prestação representa em relação ao salário passa a ser $\frac{1{,}26P}{1{,}05S}$.

Levando em conta a relação (I), temos que $\frac{P}{S} = 0{,}25$.

Dessa forma, a porcentagem procurada vale:

$$\frac{1{,}26P}{1{,}05S} = \frac{1{,}26}{1{,}05} \cdot \frac{P}{S} = \frac{1{,}26}{1{,}05} \cdot (0{,}25) = 0{,}30 = 30\%$$

Uma outra forma de resolvermos a questão é adotarmos um valor arbitrário para o salário: S = 1 000, por exemplo. Assim, P = 250.
O salário reajustado passa a ser 1 000(1,05) = 1 050 e a prestação reajustada, 250(1,26) = 315.

Portanto, a prestação como porcentagem do salário vale:
$\frac{315}{1050} = 0{,}30 = 30\%$

48. Vamos utilizar a seguinte tabela:

	Preço por pacote	Número de balas	Preço por bala
Antes do aumento	p	n	$\frac{p}{n}$
Depois do aumento	1,08p	1,2n	$\frac{1{,}08p}{1{,}2n}$

Assim, o preço por bala depois do aumento foi $\frac{1{,}08p}{1{,}2n} = 0{,}9 \cdot \frac{p}{n}$, que corresponde a 90% do preço antes do aumento. Dessa forma houve uma diminuição percentual de 10% no preço por bala.

52. Seja x o valor da conta de água em agosto. Podemos montar a seguinte tabela de valores:

	Água	Energia elétrica	Total
Agosto	x	1,5x	2,5x
Setembro	1,1x	$(1{,}2) \cdot 1{,}5x = 1{,}8x$	2,9x

De acordo com o enunciado, $2{,}9x - 2{,}5x = 20 \Rightarrow x = 50$.
Portanto, a conta de energia elétrica em setembro foi de $1{,}8 \cdot (50) = 90$.

54. a) De acordo com o enunciado, temos:
- As 12 primeiras prestações são de 200 cada. Total do ano: $12(200) = 2\,400$.
- As 12 prestações seguintes são de $200 + 20 = 220$ cada. Total do ano: $12(220) = 2\,640$.
- As 12 prestações seguintes são de $220 + 22 = 242$ cada. Total do ano: $12(242) = 2\,904$.

b) O valor total a ser desembolsado é de:
$5\,000 + 2\,400 + 2\,640 + 2\,904 = 12\,944$.

55. a) Temos:
- Em X, cada grupo de 4 latas tem o preço de 3, ou seja, R$ 12,00. Logo, 12 latas (3 grupos de 4) custarão R$ 36,00.

- Em Y, as 12 latas custarão R\$ 12 · (4 − 0,8) = R\$ 38,40.

Nessas condições é mais econômico comprar em X.

b) Temos:

- Em X, as 8 primeiras latas custarão R\$ 12,00 + R\$ 12,00 = = R\$ 24,00. As 3 restantes custarão R\$ 3 · (4,00) = 12,00. Logo, o custo total é R\$ 36,00.
- Em Y, as 11 latas custarão R\$ 11 · (4 − 0,8) = 35,20.

Nessas condições é mais econômico comprar em Y.

58. a) A comissão recebida foi de (0,05)62 400 = 3 120.

b) Seja *x* o valor da venda efetuada; a comissão do vendedor será 0,05x. Assim, de acordo com o enunciado: x − 0,05x = 79 800

Portanto: $0{,}95x = 79\,800 \Rightarrow x = \dfrac{79\,800}{0{,}95} = 84\,000$

A comissão do vendedor foi 0,05(84 000) = 4 200.

61. a) Seja *x* a quantidade de metros quadrados do terreno. Podemos escrever: 15x + 0,05(15x) = 7 560

Portanto: $15{,}75x = 7\,560 \Rightarrow x = \dfrac{7\,560}{15{,}75} = 480$

Dessa forma, o custo final de cada m^2 do terreno será de $\dfrac{7\,560}{480} = 15{,}75$.

b) A área máxima que pode ser comprada com R\$ 7 560,00 é $\dfrac{7\,560}{15{,}75} = 480\ m^2$.

62. a) Valor do ICMS: 0,25 · 165 = 41,25 (reais).

Portanto, o valor da conta antes da incidência do ICMS corresponde a R\$ 165 − R\$ 41,25 = R\$ 123,75.

b) Nessas condições, o valor da conta a ser paga seria R\$ 123,75 + + 0,25 · 123,75 = R\$ 154,69.

63. De acordo com o enunciado:

- o número de empregados hoje é 7 000 e o de desempregados é 3 000;
- daqui a 1 ano, o número de empregados será 7 000 − (0,10)7 000 + + (0,60)3 000 = 8 100;
- daqui a 2 anos, o número de empregados será 8 100 − (0,10)8 000 + + (0,60)1 900 = 8 430.

Assim, o percentual de pessoas empregadas, em relação às 10 000 aptas para o trabalho, é: $\dfrac{8\,430}{10\,000} = 0{,}843 = 84{,}3\%$.

64. a) O número de novos empregos formais criados durante o período foi: $10\,195\,671 - 9\,554\,199 = 641\,472$

b) Seja *x* o número de pessoas formalmente empregadas em julho de 2000. Assim: $0{,}03x = 641\,472 \Rightarrow x = 21\,382\,400$
Portanto, o número de pessoas formalmente empregadas em junho de 2001 foi: $21\,382\,400 + 641\,472 = 22\,023\,872$

65. a) Temos:

- Como são vendidos diariamente 5 000 pães, e 1 kg de farinha produz 50 pães, a quantidade diária de farinha utilizada é $\frac{5\,000}{50} = 100$ kg.
- Como o custo do quilograma de farinha é R$ 1,00, então gasta-se por dia R$ 100,00 com farinha.
- Como o custo da mistura é R$ 0,90 por quilograma, e como são necessários 100 kg da mistura para fabricar os 5 000 pães, o gasto com a mistura é de R$ 90,00.
  Portanto, a economia obtida por dia é de R$ 10,00.

b) Com R$ 10,00 de economia por dia, pode-se comprar $\frac{10}{0{,}90} =$ $= 11{,}11$ kg da mistura; portanto, o inteiro máximo procurado é 11 kg.
Assim, com 11 kg da mistura pode-se fabricar $11(50) = 550$ pães a mais por dia.

66. 1) Seja *x* a tarifa sem desconto. Então:

$$x - 0{,}3x = 8 \Rightarrow 0{,}7x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{0{,}7} = 11{,}42$$

Portanto, a alternativa é **falsa**.

2) Seja *x* a tarifa sem desconto. Então:
- na empresa X, o preço seria $x - 0{,}5x = 0{,}5x$;
- na empresa Y, o preço seria $x - 0{,}3x = 0{,}7x$.

Portanto, o que se paga a mais em Y, em relação ao valor pago em X, é $\frac{0{,}7x - 0{,}5x}{0{,}5x} = 0{,}40 = 40\%$.
Logo, a alternativa é **falsa**.

3) Seja *x* a tarifa (ida e volta) sem desconto gasta por dia. Então:

$$x - 0{,}3x = \frac{80}{20} = 4 \Rightarrow 0{,}7x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{0{,}7} = 5{,}71$$

No mês de março, com 24 dias úteis, o gasto com a empresa X seria: $24 \cdot \left(\frac{4}{0{,}7}\right) \cdot 0{,}5 = 68{,}57$

Portanto, a afirmativa é **falsa**.

67. 1) Temos, de acordo com o enunciado:

$$400\,E + 800\,T + 2\,800\,G = 20\,800 \text{ (I)}$$

$$\frac{400\,E + 800\,T + 2\,800\,G}{E + T + G} = 520 \text{ (II)}$$

Substituindo-se (I) em (II), resulta que: $E + T + G = \frac{20\,800}{520} = 40$

Portanto, o item 1 é verdadeiro.

2) Temos, após as reduções:

Salário dos estagiários: $400 - (0{,}01)400 = 396$

Salário dos técnicos: $800 - (0{,}03)800 = 776$

Salário dos gerentes: $2\,800 - (0{,}05)2\,800 = 2\,660$

Folha de pagamentos: $20\,800 - (0{,}02)20\,800 = 20\,384$

Consequentemente: $396\,E + 776\,T + 2\,660\,G = 20\,384$

Portanto, o item 2 é verdadeiro.

69. De acordo com o enunciado, há $0{,}63x$ mulheres e $0{,}37x$ homens. Entre os homens, 45% têm nível universitário e 55% não. Assim, o número de homens sem formação universitária é:

$(0{,}55)0{,}37x = 0{,}2035x$

74. Seja *p* o preço de venda e *c* o custo por unidade. Temos:

a) $p - c = 0{,}18p$

Logo $0{,}82p = c$. Portanto, a margem de contribuição unitária como porcentagem do custo por unidade é:

$$\frac{0{,}18p}{c} = \frac{0{,}18p}{0{,}82p} = 0{,}2195 = 21{,}95\%$$

b) $p - c = 1{,}4c$

Logo $2{,}4c = p$. Portanto, a margem de contribuição unitária como porcentagem de preço de venda é:

$$\frac{1{,}4c}{p} = \frac{1{,}4c}{2{,}4c} = 0{,}5833 = 58{,}33\%$$

75. a) A margem de contribuição por unidade do produto é, em reais, $0{,}70 - 0{,}41 = 0{,}29$.

b) O lucro nos 25 dias é dado por:

$L = (0{,}70) \cdot 100 \cdot (25) - (0{,}41) \cdot 100 \cdot (25) - 40 = 685$

76. a) Podemos montar a seguinte tabela:

	PNB	População	PNB *per capita*
Início	x	y	$\frac{x}{y}$
Fim	$1{,}3x$	$1{,}2y$	$\frac{1{,}3x}{1{,}2y} = \frac{1{,}0833x}{y}$

Dessa forma o PNB *per capita* cresceu 8,33%. Portanto, a afirmação é falsa.

b) Seja *p* o preço de venda e *c* o custo. Então, de acordo com o enunciado: $p - c = 0{,}2p \Rightarrow 0{,}8p = c \Rightarrow p = \frac{1}{0{,}8}c = 1{,}25c$

Assim, o lucro, em relação ao custo, é dado por:
$1{,}25c - c = 0{,}25c$
Portanto, o lucro é igual a 25% do custo, e a afirmação é verdadeira.

77. Chamando de *p* o preço final de venda por unidade, o lucro por unidade pode ser expresso de duas formas:
$p - 0{,}34 - 0{,}1p$ (I)
$0{,}5(0{,}34 + 0{,}1p)$ (II)
Igualando as duas expressões acima, teremos:
$p - 0{,}34 - 0{,}1p = 0{,}5(0{,}34 + 0{,}1p)$
$0{,}85p = 0{,}51 \Rightarrow p = \frac{0{,}51}{0{,}85} = 0{,}60$
Pela expressão (I), o lucro por unidade vale $0{,}60 - 0{,}34 - (0{,}1)0{,}60 = 0{,}20$.

1) A afirmação é falsa.
2) Se ele faturou R$ 600,00, então o número de cocos vendidos foi $\frac{600}{0{,}60} = 1\,000$. Como o lucro por unidade vale R$ 0,20, seu lucro foi de 1 000(R$ 0,20) = R$ 200,00. Portanto, a afirmação é verdadeira.
3) A afirmação é verdadeira, pois o lucro por unidade vendida é R$ 0,20; dobrando-se a quantidade vendida, dobra-se o lucro.
4) Seja *x* a quantidade vendida para dar um lucro de R$ 500,00. Assim:
   $x \cdot (0{,}20) = 500 \Rightarrow x = 2\,500$
   Portanto, essa afirmação é verdadeira.

78. O preço de custo de cada unidade foi $\frac{120}{100} = 1{,}20$.

- As 40 unidades vendidas com uma margem de 50% do custo unitário tiveram um preço de venda por unidade igual a $1{,}20 + (0{,}50)1{,}20 = 1{,}80$.
- As 60 unidades vendidas com uma margem de 30% do custo unitário tiveram um preço de venda por unidade igual a $1{,}20 + (0{,}30)1{,}20 = 1{,}56$.
- Assim, a receita de venda foi $40(1{,}80) + 60(1{,}56) = 165{,}60$.

79. Seja *x* o volume de vendas em reais. Dessa forma, teremos, de acordo com o enunciado:

Despesa: $90 + 0{,}3x$
Lucro: $0{,}2x$
Portanto: $x - (90 + 0{,}3x) = 0{,}2x \Rightarrow 0{,}5x = 90 \Rightarrow x = 180$
O lucro vale $(0{,}2) \cdot 180 = 36$.

80. Seja *x* o preço original de cada livro. De acordo com o enunciado:
- o preço dos 6 livros com desconto será $6x - (0{,}2) \cdot 6x = 4{,}8x$;
- o preço de remessa será $0{,}05 \cdot (0{,}8x) \cdot 5 = 0{,}2x$;
- o preço das embalagens será $5 \cdot (1) = 5$.

Portanto: $4{,}8x + 0{,}2x + 5 = 289 \Rightarrow 5x = 284 \Rightarrow x = \dfrac{284}{5} = 56{,}80$

81. Sejam *a* e *b* as quantidades vendidas dos dois produtos, *x* e *y*, respectivamente.
O custo unitário do 1º produto foi 4, e o preço de venda foi $4 + (0{,}5) \cdot 4 = 6$. O custo unitário do 2º produto foi 10, e o preço de venda foi $10 + (0{,}4) \cdot 10 = 14$.
Os valores *a* e *b* devem satisfazer simultaneamente as seguintes equações:

$$\begin{cases} a + b = 260 \\ 6a + 14b = 2680 \end{cases}$$

cuja solução é $a = 120$ unidades de *x* e $b = 140$ unidades de *y*.

82. a) Temos:
- Antes das 10 h, o preço de cada melão era 2.
- Entre 10 h e 11 h, o preço de cada melão era $2 - (0{,}2) \cdot 2 = 1{,}60$.
- Após as 11 h, o preço de cada melão era 1,30.

b) Indiquemos por *x* a quantidade de melões vendidos antes das 10 h, *y* a quantidade de melões vendidos entre 10 h e 11 h e *z* a quantidade de melões vendidos após as 11 h.
De acordo com o enunciado, devemos ter:

$$\begin{cases} y + z = \dfrac{5}{6}(300) \\ x = \dfrac{1}{6}(300) \\ 2x + 1{,}6y + 1{,}3z = 461 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos: $x = 50$, $y = 120$ e $z = 130$.

86. Seja *x* o número de homens e *y* o número de mulheres. Devemos ter simultaneamente:

$$\begin{cases} x + y = 18\,500 \\ x - 0{,}06x = y - 0{,}09y \end{cases}, \text{ cuja solução é } x = 9\,100 \text{ e } y = 9\,400.$$

90. De acordo com a tabela, temos:

a) Variação percentual de 1991 em relação a 1981:

$$\frac{622\,000}{213\,000} - 1 = 0{,}9202 = 192{,}02\%$$

Variação percentual de 2001 em relação a 1991:

$$\frac{1\,351\,000}{622\,000} - 1 = 0{,}1720 = 117{,}20\%$$

Variação percentual de 2011 em relação a 2001:

$$\frac{2\,105\,000}{1\,351\,000} - 1 = 0{,}5581 = 55{,}81\%$$

b) A média aritmética das variações percentuais anteriores é:

$$\frac{192{,}02 + 117{,}20 + 55{,}81}{3} = 121{,}68\%$$

c) A produção em 2021 será $2105000 + (1{,}2168) \cdot 2105000 =$
$= 4666364$ barris/dia.

91. Seja P o número de habitantes antes do crescimento. Devemos ter:

$$\frac{64\,000}{P} - 1 = 0{,}04$$

$$\frac{64\,000}{P} = 1{,}04 \Rightarrow P = \frac{64\,000}{1{,}04} = 61\,538$$

97. Sejam:
M o número de internautas em maio de 1999;
N o número de internautas em maio de 2000;
x o número de mulheres internautas em maio de 1999;
y o número de mulheres internautas em maio de 2000.
De acordo com os dados do exercício, temos:

- $y = 0{,}504N$ (I)
- $\frac{y}{x} - 1 = 0{,}349 \Rightarrow \frac{y}{x} = 1{,}349$ (II)
- $\frac{N}{M} - 1 = 0{,}224 \Rightarrow \frac{N}{M} = 1{,}224$ (III)

a) Desejamos calcular o valor de $\frac{x}{M}$. De (I), (II) e (III) temos, expressando tudo em função de N:

$$\frac{x}{M} = \frac{\frac{y}{1{,}349}}{\frac{N}{1{,}224}} = \frac{\frac{0{,}504N}{1{,}349}}{\frac{N}{1{,}224}} = \frac{0{,}504}{1{,}349} \cdot (1{,}224) = 0{,}4573 = 45{,}73\%$$

b) Desejamos calcular o valor de $\frac{N - y}{M - x} - 1$. De (I), (II) e (III) temos, expressando tudo em função de N:

$$\frac{N - y}{M - x} - 1 = \frac{N - 0{,}504N}{\dfrac{N}{1{,}224} - \dfrac{y}{1{,}349}} - 1 = \frac{0{,}496N}{\dfrac{N}{1{,}224} - \dfrac{0{,}504N}{1{,}349}} - 1 =$$

$$= \frac{0{,}496N}{0{,}4434N} - 1 = 0{,}1186 = 11{,}86\%$$

100. A taxa acumulada de variação percentual é:

$j_{ac} = (1{,}01)(1{,}01)(1{,}01)(1{,}01)(1{,}01) - 1$

$j_{ac} = (1{,}01)^5 - 1 = 0{,}0510 = 5{,}10\%$

102. A taxa acumulada de variação percentual é:

$j_{ac} = (1 - 0{,}03)^4 - 1 \Rightarrow j_{ac} = (0{,}97)^4 - 1 = -0{,}1147 = -11{,}47\%$

104. a) Seja *x* o volume do reservatório em março. O volume no final do período seco (novembro) será $x(1 - 0{,}20)^8 = 0{,}1678x$.
Portanto, a relação entre o volume em março e em novembro será $\dfrac{x}{0{,}1678x} = 5{,}96$.

b) Seja C a capacidade do reservatório. No período seco ele apresenta uma capacidade igual a 0,5C. Desejamos obter o prazo *n* (em meses), ao final do qual a capacidade será 0,2C.
Assim:

$$0{,}2C = 0{,}5C \cdot (1 - 0{,}2)^n$$

$$0{,}8^n = 0{,}4 \Rightarrow \log (0{,}8)^n = \log (0{,}4) \Rightarrow n \log (0{,}8) = \log (0{,}4)$$

$$n = \frac{\log (0{,}4)}{\log (0{,}8)} = \frac{\log \left(\dfrac{4}{10}\right)}{\log \left(\dfrac{8}{10}\right)} = \frac{\log 4 - \log 10}{\log 8 - \log 10} = \frac{\log 2^2 - 1}{\log 2^3 - 1} =$$

$$= \frac{2 \log 2 - 1}{3 \log 2 - 1} = \frac{2(0{,}3) - 1}{3(0{,}3) - 1} = 4$$

108. Indicando por *x* as exportações de 1995, podemos construir a seguinte tabela:

Ano	1995	1996	1997
Exportações	x	1,12x	$(1{,}08) \cdot 1{,}12x = 1{,}2096x$

Vamos analisar os itens:

1) A afirmação é falsa, pois em 1996 o valor das exportações foi 1,12 vez o valor correspondente em 1995.
2) Diminuindo 8% do valor das exportações em 1997, obtemos:
$1{,}2096x(1 - 0{,}08) = 1{,}1128x$
Portanto, a afirmação é falsa.

3) Em 1997 o valor das exportações foi 20,96% superior ao valor das exportações em 1995. Portanto, a afirmação é falsa.
4) Seja *j* o crescimento anual constante no biênio. Devemos ter:
$x \cdot (1 + j)^2 = 1{,}2096x$
$(1 + j) = (1{,}2096)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow j = (1{,}2096)^{\frac{1}{2}} - 1 = 9{,}98\%$
Portanto, a afirmação é verdadeira.

110. Seja *x* o valor da mesada e *y* a despesa com lazer após o aumento. Podemos construir a seguinte tabela:

	Despesa antes do aumento	Despesa depois do aumento
Transporte	0,45x	0,45x(1,1) = 0,495x
Lazer	0,25x	*y*
Lanche	0,30x	0,30x
Total	*x*	*x*

Assim, devemos ter:
$0{,}495x + y + 0{,}30x = x \Rightarrow y = 0{,}205x$
Portanto, a variação percentual na despesa com lazer foi:
$$\frac{0{,}205x}{0{,}25x} - 1 = -18\%$$

114. a) A taxa acumulada no período é:
$j_{ac} = (1{,}012)(1{,}008)(1{,}013) - 1 = 0{,}0334 = 3{,}34\%$
b) Seja *j* a taxa de inflação de outubro. Devemos ter:
$(1{,}012)(1{,}008)(1{,}013)(1 + j) - 1 = 0{,}04$
$(1{,}0334)(1 + j) = 1{,}04 \Rightarrow 1 + j = \dfrac{1{,}04}{1{,}0334} \Rightarrow j = 0{,}064 = 0{,}64\%$

123. Seja *j* a taxa mensal procurada. Devemos ter:
$(1 + j)^{12} - 1 = 855{,}44(10^6)$
$(1 + j)^{12} = 855440001 \Rightarrow 1 + j = (855\,440\,001)^{\frac{1}{12}} \Rightarrow j = 455\%$

127. Seja S o salário de João e *p* o preço do quilo de feijão, antes do aumento. Depois do aumento, o salário passou a valer 1,10S e o preço do quilo de feijão passou a ser 1,30p.
Como $\dfrac{S}{p} = M$, queremos saber o valor de $\dfrac{1{,}10S}{1{,}30p}$.
Temos: $\dfrac{1{,}10S}{1{,}30p} = 0{,}8462 \cdot \dfrac{S}{p} = 0{,}8462M$
Portanto, após os aumentos, João conseguirá comprar com seu salário 84,62% dos M kg de feijão.

CAPÍTULO II — Matemática financeira

135. Seja C o capital aplicado. Como o investidor dobrou seu capital em 2 anos, isso significa que o juro recebido no período foi igual a C, isto é, J = C.
Portanto, a taxa de juros no período da operação é dada por:
$i = \frac{J}{C} = \frac{C}{C} = 1 = 100\%$

136. O preço para pagamento à vista é $1\,000 - 0{,}10(1\,000) = 900$.
O preço para pagamento em 30 dias é $1\,000 - 0{,}072(1\,000) = 928$.
a) O montante de R$ 900,00 dentro de 30 dias à taxa de 3% a.m. vale:
$M = 900 + 0{,}03(900) = 927$
b) É mais vantajoso pagar à vista, pois, se o comprador aplicar o valor do pagamento à vista por 30 dias, obterá um montante insuficiente para pagar o valor de R$ 928,00 (faltará R$ 1,00 para o pagamento).

137. Temos:
- valor da aplicação convertido em reais: $50\,000(1{,}10) = 55\,000$;
- montante da aplicação de R$ 55 000,00 após 1 ano: $55\,000 + 0{,}18(55\,000) = 64\,900$;
- montante da aplicação convertido em dólares: $\frac{64\,900}{1{,}20} = 54\,083{,}33$.

a) A taxa de rendimento, considerando-se os valores em dólares, é:
$i = \frac{4\,083{,}33}{50\,000} = 0{,}0817 = 8{,}17\%$ a.a.
b) Se a taxa de rendimento em dólares fosse 12% a.a., o montante em dólares deveria ser $50\,000 + 0{,}12 \cdot (50\,000) = 56\,000$. Esse valor convertido para reais deveria dar R$ 64 900,00. Indicando por *x* o valor de 1 dólar expresso em reais na data de resgate, deveríamos ter: $56\,000x = 64\,900 \Rightarrow x = \frac{64\,900}{56\,000} = 1{,}1589$

140. Indicando por C o total aplicado, teremos:
- valor aplicado no fundo A: 0,3C; rendimento dessa aplicação: $(0{,}08)0{,}3C = 0{,}024C$;
- valor aplicado no fundo B: 0,3C; rendimento dessa aplicação: $(0{,}12)0{,}3C = 0{,}036C$;
- valor aplicado no fundo C: 0,4C; rendimento dessa aplicação: $(0{,}06)0{,}4C = 0{,}024C$;
- rendimento total: $0{,}024C + 0{,}036C + 0{,}024C = 0{,}084C$;

- taxa global de rendimento: $i = \frac{0{,}084C}{C} = 0{,}084 = 8{,}4\%$ no período de 8 meses.

141. a) O rendimento anual esperado é:
$(0{,}15)7\,000 + (0{,}20)5\,000 = 2\,050$
que corresponde a uma taxa de $\frac{2\,050}{12\,000} = 17{,}08\%$.

b) Chamando de x o valor investido em A, o valor investido em B será $12\,000 - x$. Assim, o rendimento esperado será:
$(0{,}15)x + (0{,}20)(12\,000 - x) = 2\,400 - 0{,}05x$

Como o rendimento deverá ser no mínimo R$ 2 200,00, então:
$2\,400 - 0{,}05x \geqslant 2\,200 \Rightarrow -0{,}05x \geqslant -200 \Rightarrow x \leqslant \frac{200}{0{,}05} \Rightarrow x \leqslant 4\,000$
Portanto, o valor de x deverá ser no máximo R$ 4 000,00.

147. a) No 1º mês, ela perdeu $(0{,}40)3\,000 = 1\,200$, ficando com um saldo de R$ 1 800,00.
No 2º mês, ela recuperou $(0{,}30)1\,200 = 360$, ficando com um saldo de R$ 2 160,00.

b) O prejuízo expresso em porcentagem foi de $\frac{3\,000 - 2\,160}{3\,000} =$
$= 0{,}28 = 28\%$.

148. Temos:
- montante após 1 mês: $500 + (0{,}02)500 = 510$; saldo após a retirada de 185: $510 - 185 = 325$;
- montante após 2 meses: $325 + (0{,}02)325 = 331{,}50$; saldo após a retirada de 185: $331{,}50 - 185 = 146{,}50$;
- montante após 3 meses: $146{,}50 + (0{,}02)146{,}50 = 149{,}43$; portanto, para pagar a 3ª prestação, ele ainda terá que desembolsar $185 - 149{,}50 = 35{,}57$.
  Assim, nota-se que essa opção não foi boa para Paulo.

149. Se a taxa fosse de 10% a.m., teríamos:
- saldo após a entrada: $54 - 20 = 34$;
- montante da dívida após 1 mês: $34 + 3{,}40 = 37{,}40$; saldo após o pagamento da 1ª prestação: $37{,}40 - 20 = 17{,}40$;
- montante da dívida após 2 meses: $17{,}40 + 1{,}74 = 19{,}14$.
  Para liquidar a dívida, esse montante deveria ser igual a 20; como ele é 19,14, concluímos que a taxa deve ser maior que 10% a.m.

156. Seja C o capital aplicado por Roberto. Então:

a) O montante da aplicação mais o juro deve ser igual a 12 000, ou seja:
$C + C \cdot (0{,}02) \cdot 4 = 12\,000 \Rightarrow 1{,}08C = 12\,000$
$C = \dfrac{12\,000}{1{,}08} = 11\,111{,}11$
b) É melhor pagar a prazo, pois ele deverá aplicar um valor menor que o preço à vista, para fazer frente ao pagamento a prazo.

157. Chamando de C o valor aplicado no banco A, o valor aplicado em B será 30 000 − C.
O juro auferido no banco A será: $C \cdot (0{,}018) \cdot 24 = 0{,}432C$.
O juro auferido no banco B será:
$(30\,000 - C) \cdot (0{,}022) \cdot 18 = 11\,880 - 0{,}396C$.
Como os juros nos dois bancos devem ser iguais, então:
$0{,}432C = 11\,880 - 0{,}396C \Rightarrow 0{,}828C = 11\,880$
$C = \dfrac{11\,880}{0{,}828} = 14\,347{,}83$
Assim, o valor aplicado no banco A deve ser R$ 14 347,83 e o aplicado em B deve ser R$ 15 652,17.

161. O valor financiado (capital) é 600 − 200 = 400 reais. O valor da parcela de 450 reais corresponde ao montante de 400. Logo, o juro do financiamento vale 450 − 400 = 50. Então:
a) Chamando de *i* a taxa mensal de juros simples, teremos:
$50 = 400 \cdot i \cdot 2 \Rightarrow i = \dfrac{50}{800} = 0{,}0625 = 6{,}25\%$ a.m.
b) Seja *n* o prazo (em meses) de vencimento da parcela de 450 reais à taxa de 2,5% a.m. Teremos:
$50 = 400 \cdot (0{,}025) \cdot n \Rightarrow n = \dfrac{50}{10} = 5$ meses

162. Se o comprador paga 20% no ato da compra, ele desembolsa, em reais, $(0{,}20) \cdot 130 = 26$; portanto, o valor financiado é $130 - 26 = 104$. A parcela de R$ 128,96 corresponde ao montante do valor financiado; logo, o juro do financiamento é $128{,}96 - 104 = 24{,}96$. Assim, chamando de *i* a taxa anual de juros simples do financiamento, teremos:
$24{,}96 = 104 \cdot i \cdot \dfrac{3}{12} \Rightarrow 24{,}96 = 26 \cdot i \Rightarrow i = \dfrac{24{,}96}{26} = 0{,}96 = 96\%$

165. Seja C o capital emprestado. O montante será igual a 1,60C e, consequentemente, o juro será 0,60C. Chamando de *i* a taxa mensal de juros simples, teremos:
$J = C \cdot i \cdot n \Rightarrow 0{,}60C = C \cdot i \cdot 15 \Rightarrow i = \dfrac{0{,}60}{15} = 0{,}04 = 4\%$

167. Sejam C o capital e $M = 3C$ o montante. Assim, o juro será igual a 2C. Chamando de *n* o prazo procurado (em anos), teremos:

$$J = C \cdot i \cdot n \Rightarrow 2C = C \cdot (0{,}08) \cdot n \Rightarrow n = \frac{2}{0{,}08} = 25$$

171. O juro dessa aplicação vale $J = 2\,920 - 2\,500 = 420$. Seja *i* a taxa anual da aplicação. Teremos:

$$J = C \cdot i \cdot n \Rightarrow 420 = 2\,500 \cdot i \cdot (0{,}5)$$

$$420 = 1\,250 \cdot i \Rightarrow i = \frac{420}{1\,250} = 0{,}336 = 33{,}6\%$$

173. Seja *i* a taxa anual da aplicação.

O prazo em anos vale $n = \dfrac{3(30) + 12}{360} = \dfrac{102}{360}$.

Teremos, então: $300 = 4\,500 \cdot i \cdot \dfrac{102}{360}$

$$i = \frac{300 \cdot (360)}{4\,500 \cdot (102)} = 0{,}2353 = 23{,}53\%$$

175. a) Seja C o capital que Renata deverá aplicar. Então, devemos ter:

$$C + C \cdot (0{,}018) \cdot \frac{100}{30} = 1\,200 \Rightarrow 1{,}06C = 1\,200 \Rightarrow C = 1\,132{,}08$$

b) Para pagar à vista ela terá que desembolsar R$ 1 050,00; enquanto, para pagar a prazo, ela terá que aplicar, no dia da compra, R$ 1 132,08. Assim, é melhor pagar à vista.

178. O valor do desconto foi $D = 2\,800 - 2\,632 = 168$. Chamando de *n* o prazo de antecipação (em meses), teremos:

$$D = N \cdot d \cdot n \Rightarrow 168 = 2\,800 \cdot (0{,}024) \cdot n \Rightarrow 168 = 67{,}2n \Rightarrow n = 2{,}5$$

182. Seja N o valor da duplicata a ser descontada, com vencimento dentro de 3 meses. Teremos:

$$N = N \cdot (0{,}04) \cdot 3 = 15\,000 \Rightarrow 0{,}88N = 15\,000 \Rightarrow N = 17\,045{,}45$$

Caso a gráfica opte pela linha de crédito a juros simples à taxa de 4,2% a.m., o montante a ser pago dentro de 3 meses será:

$$M = 15\,000 + 15\,000 \cdot (0{,}042) \cdot 3 = 16\,890$$

Portanto, a linha de crédito com juros simples à taxa de 4,2% a.m. é mais vantajosa para a gráfica, pois envolve um desembolso de valor menor daqui a 3 meses ($16\,890 < 17\,045{,}45$).

185. O valor descontado da 1ª promissória é: $P - P \cdot (0{,}03) \cdot 2 = 0{,}94P$.

O valor descontado da 2ª promissória é: $P - P \cdot (0{,}03) \cdot 3 = 0{,}91P$.
Devemos ter: $0{,}94P + 0{,}91P = 30\,000$
$1{,}85P = 30\,000 \Rightarrow P = 16\,216{,}22$

190. a) O montante da aplicação foi $M = 12\,000(1{,}015)^{24} = 17\,154{,}03$.
Portanto, o valor dos juros foi $17\,154{,}03 - 12\,000 = 5\,154{,}03$.
b) Nesse caso, chamando de *i* a taxa mensal, vale a relação:
$J = C \cdot i \cdot n \Rightarrow 5\,154{,}03 = 12\,000 \cdot i \cdot 24 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5\,154{,}03 = 288\,000 \cdot i \Rightarrow i = 0{,}0179 = 1{,}79\%$

192. Se, em vez de aplicar os R$ 20 000,00 no terreno, ele tivesse aplicado esse valor a juros compostos, o montante obtido após 5 anos seria: $M = 20\,000(1{,}09)^5 = 30\,772{,}48$
Portanto, a aplicação a juros compostos é mais vantajosa (o montante é maior que o valor do terreno).

194.
- O montante após 1 ano, tomando-se empréstimo junto aos países ricos, vale $M_1 = C(1{,}042)^1$. Portanto, os juros anuais do empréstimo valem $J_1 = 1{,}042C - C = 0{,}042C$.
- O montante após 1 ano, tomando-se empréstimo junto dos banqueiros do país irreal, vale $M_2 = C(1{,}03)^{12} = 1{,}42C$. Portanto, os juros anuais do empréstimo valem $J_2 = 1{,}042C - C = 0{,}42C$.
- Assim, J_2 é **10 vezes** maior que J_1.

195. a) O montante recebido após 10 meses foi:
$M = 12\,000(1{,}014)^{10} = 13\,789{,}89$
b) Os juros ganhos ao longo do 10º mês são iguais ao montante daqui a 10 meses menos o montante daqui a 9 meses, isto é:
$12\,000 \cdot (1{,}014)^{10} - 12\,000 \cdot (1{,}014)^9 = 190{,}39$

196. Na 1ª opção de investimento, o montante recebido vale $M_1 = 1\,000(1{,}20)^2 = 1\,440$. Porém, nessa opção há incidência de imposto de renda igual a $(0{,}25)1\,440 = 360$. Assim, com o imposto, Suely ficará com R$ 1 440,00 − R$ 360,00 = R$ 1 080,00.
Na 2ª opção, o montante recebido vale $M_2 = 1\,000(1{,}06)^2 = 1\,123{,}60$, pois nessa opção não há impostos. Portanto, a 2ª opção renderá mais a Suely.

198. Seja C o capital aplicado por Teresa:
- 30% de C, isto é, $0{,}30C$ foi aplicado a juros simples, proporcionando um montante $M_1 = 0{,}30C + 0{,}30C \cdot (0{,}025) \cdot 12 = 0{,}39C$;
- 70% de C, isto é, $0{,}70C$ foi aplicado a juros compostos, proporcionando um montante $M_2 = 0{,}70C(1{,}015)^{12} = 0{,}8369C$;
- o montante total das aplicações foi $M_1 + M_2 = 1{,}2269C$;

- os juros recebidos após 1 ano foram $1{,}2269C - C = 0{,}2269C$;
- a taxa anual da aplicação foi $i = \dfrac{0{,}2269C}{C} = 0{,}2269 = 22{,}69\%$.

203. O capital financiado é R$ 1 600,00 (preço à vista menos a entrada). A parcela de R$ 1 800,00 corresponde ao montante de R$ 1 600,00 três meses após a compra. Portanto, chamando de *i* a taxa mensal, teremos:

$1800 = 1600(1 + i)^3 \Rightarrow (1 + i)^3 = 1{,}1250 \Rightarrow (1 + i) = (1{,}1250)^{\frac{1}{3}}$

$1 + i = 1{,}04 \Rightarrow i = 0{,}04 = 4\%$

206. Seja *i* a taxa trimestral procurada. Para que o capital duplique, devemos ter $M = 2C$. Assim:

$2C = C(1 + i)^4$, pois o prazo em trimestres vale 4

$(1 + i)^4 = 2 \Rightarrow 1 + i = 2^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 1 + i = 1{,}1892 \Rightarrow i = 0{,}1892 = 18{,}92\%$

209. a) Temos: $C = 20000$, $M = 26000$ e $n = \dfrac{72}{30} = 2{,}4$ meses. Portanto, chamando de *i* a taxa mensal, teremos:

$26000 = 20000(1 + i)^{2,4} \Rightarrow (1 + i)^{2,4} = 1{,}3 \Rightarrow (1 + i) = 1{,}3^{\frac{1}{2,4}}$

$1 + i = 1{,}3^{0,4167} \Rightarrow 1 + i = 1{,}1155 \Rightarrow i = 0{,}1155 = 11{,}55\%$

b) Chamando de *i* a taxa anual, teremos que expressar o prazo *n* em anos, isto é, $n = \dfrac{72}{360} = 0{,}2$. Assim:

$26000 = 20000(1 + i)^{0,2} \Rightarrow (1 + i)^{0,2} = 1{,}3 \Rightarrow (1 + i) = 1{,}3^{\frac{1}{0,2}}$

$1 + i = 1{,}3^5 \Rightarrow 1 + i = 3{,}7129 \Rightarrow i = 2{,}7129 = 271{,}29\%$

211. Seja *n* o prazo em meses da operação. Chamando de C o capital, o montante será $M = 3C$. Assim:

$3C = C(1{,}02)^n \Rightarrow (1{,}02)^n = 3 \Rightarrow \log (1{,}02)^n = \log 3$

$n\log(1{,}02) = \log 3 \Rightarrow n = \dfrac{\log 3}{\log 1{,}02} \Rightarrow n = \dfrac{0{,}4771}{0{,}0086} = 55{,}48 \simeq 1664$ dias

216. Seja *n* o prazo, em meses, de modo que os montantes se igualem. Então:

$900(1{,}03)^n = 1000(1{,}02)^n \Rightarrow \left(\dfrac{1{,}03}{1{,}02}\right)^n = 1{,}1111 \Rightarrow 1{,}0098^n = 1{,}1111$

$n\log(1{,}0098) = \log(1{,}1111) \Rightarrow n = \dfrac{\log(1{,}1111)}{\log(1{,}0098)} = 10{,}80 \simeq 324$ dias

217. a) Temos:

- O montante da dívida após 1 ano é $M_1 = 500\,000(1{,}20) = 600\,000$. Após o pagamento da parcela de 180 000 resta um saldo de 420 000.
- O montante da dívida após 2 anos é $M_2 = 420\,000(1{,}20) = 504\,000$. Após o pagamento da parcela de 200 000 resta um saldo de 304 000.
- O montante da dívida após 3 anos é $M_3 = 304\,000(1{,}20) = 364\,800$. Portanto, a 3ª parcela anual vale R$ 364 800,00.

b) Seja *n* o prazo em anos para que M = 3C. Então:

$$3C = C(1{,}08)^n \Rightarrow (1{,}08)^n = 3 \Rightarrow n\log(1{,}08) = \log 3 \Rightarrow n = \frac{\log 3}{\log 1{,}08}$$

Como o prazo procurado deve ser expresso em meses, então ele vale $12 \cdot \dfrac{\log 3}{\log 1{,}08} \simeq 171{,}3$.

218. Seja *t* o prazo procurado expresso em anos. Como M = 2C, então:

$$2C = C \cdot e^{\frac{20t}{100}} \Rightarrow e^{0{,}20t} = 2$$

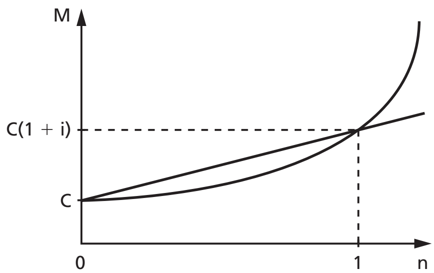
Tomando-se o logaritmo na base e de ambos os membros:

$$\log_e e^{0{,}20t} = \log_e 2 \Rightarrow 0{,}20t = 0{,}69 \Rightarrow t = \frac{0{,}69}{0{,}20} = 3{,}45$$

219. Temos:

- O montante a juros simples é M = C + Cin, e o gráfico de M em função de *n* é uma reta; para n = 0 temos M = C, e para n = 1 temos M = C + Ci = C(1 + i).
- O montante a juros compostos é $M = C(1 + i)^n$, e o gráfico de M em função de *n* é uma curva exponencial crescente; para n = 0 temos M = C, e para n = 1 temos M = C(1 + i).

  Os gráficos das duas funções são apresentados abaixo:



Assim, verifica-se que, para $0 < n < 1$, o montante a juros simples é maior que o montante a juros compostos.

223. O montante da aplicação é dado por:
$M = 10\,000 \cdot (1{,}012) \cdot (1{,}012) \cdot ... \cdot (1{,}012)$
$M = 10\,000(1{,}012)^{12} = 11\,538{,}95$

224. a) Seja *i* a taxa acumulada no bimestre. Devemos ter:
$C(1 + i) = C(1{,}02)(1{,}025) \Rightarrow 1 + i = (1{,}02)(1{,}025)$
$1 + i = 1{,}0455 \Rightarrow i = 0{,}0455 = 4{,}55\%$

b) Seja *i* a taxa de rentabilidade em março. Como a taxa acumulada no trimestre deve ser 6,5%, então:
$C(1{,}02)(1{,}025)(1 + i) = C(1{,}065) \Rightarrow (1{,}0455)(1 + i) = 1{,}065$
$$1 + i = \frac{1{,}065}{1{,}0455} \Rightarrow 1 + i = 1{,}0187 \Rightarrow i = 0{,}0187 = 1{,}87\%$$

229. O pagamento a prazo consiste em uma entrada de R$ 3600,00 mais 5 prestações mensais de R$ 3 000,00 cada. Portanto, o valor atual desses pagamentos é:
$$V = 3600 + \frac{3000}{(1{,}016)} + \frac{3000}{(1{,}016)^2} + \frac{3000}{(1{,}016)^3} + \frac{3000}{(1{,}016)^4} + \frac{3000}{(1{,}016)^5}$$
$V = 17\,906{,}04$
Como o valor atual dos pagamentos a prazo é menor que o preço à vista, é melhor o comprador pagar a prazo.

231. a) O valor a ser pago à vista, em reais, é
$(0{,}03)8\,400 - (0{,}03)8\,400(0{,}05) = 239{,}40.$

b) O valor, em reais, de cada parcela é $\dfrac{(0{,}03)8\,400}{3} = 84.$

c) O valor presente das 3 parcelas mensais, na data 15/1/1996, vale: $V = 84 + \dfrac{84}{(1{,}04)} + \dfrac{84}{(1{,}04)^2} = 242{,}43$
Como o valor à vista é menor que o valor presente das prestações, é melhor pagar à vista.

232. O valor à vista P (em reais) é o valor atual das prestações, na data da compra, isto é:
$$P = 100 + \frac{240}{(1{,}10)} + \frac{220}{(1{,}10)^2} = 500$$

233. a) Seja *x* o valor de cada prestação mensal. Devemos ter:
$$\frac{x}{(1{,}04)} + \frac{x}{(1{,}04)^2} = 1\,100 \Rightarrow (1{,}04)x + x = 1\,100(1{,}04)^2$$
$$2{,}04x = 1\,189{,}76 \Rightarrow x = \frac{1\,189{,}76}{2{,}04} = 583{,}22$$

b) Chamando de *x* o valor de cada prestação mensal, devemos ter:

$$\frac{x}{(1{,}03)} + \frac{x}{(1{,}03)^2} = 1100 \Rightarrow (1{,}03)x + x = 1100(1{,}03)^2$$

$$2{,}03x = 1166{,}99 \Rightarrow x = \frac{1166{,}99}{2{,}03} = 574{,}87$$

239. Como existe uma entrada de 6400,00, o valor financiado é 32000 − − 6400 = 25600. Portanto, chamando de R o valor de cada prestação, devemos ter:

$$25600 = R \cdot \frac{(1{,}018)^{24} - 1}{(1{,}018)^{24} \cdot 0{,}018} \Rightarrow 25600 = R \cdot 19{,}3495 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = 1323{,}03$$

240. Chamando de R o valor de cada prestação, podemos escrever:

$$3000 = R + R \cdot \frac{(1{,}026)^2 - 1}{(1{,}026)^2 \cdot 0{,}026} \Rightarrow 3000 = R + 1{,}9246R$$

$$2{,}9246R = 3000 \Rightarrow R = 1025{,}77$$

244. Para efetuar as 24 retiradas mensais de R$ 4500,00 cada, ela precisará aplicar o valor atual das retiradas um mês antes, isto é:

$$V = 4500 \cdot \frac{(1{,}016)^{24} - 1}{(1{,}016)^{24} \cdot 0{,}016} \Rightarrow V = 89098{,}61$$

Para ter o valor atual acima, ela deverá aplicar o valor X, a juros compostos, 59 meses antes. Portanto:

$$89098{,}61 = X(1{,}016)^{59} \Rightarrow 2{,}5511X = 89098{,}61 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = 34925{,}46$$

245. a) Temos:

$$5000 = R \cdot \frac{(1{,}02)^1 - 1}{(1{,}02)^1 \cdot 0{,}02} \Rightarrow R = 5100$$

b) Temos:

$$P = R \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n \cdot i} \Rightarrow P \cdot i \cdot (1 + i)^n = R \cdot (1 + i)^n - R$$

$$(1 + i)^n[R - Pi] = R \Rightarrow (1 + i)^n = \frac{R}{R - Pi}$$

$$\log (1 + i)^n = \log\left(\frac{R}{R - Pi}\right) \Rightarrow n \cdot \log (1 + i) = \log\left(\frac{R}{R - Pi}\right)$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{R}{R - Pi}\right)}{\log(1 + i)}$$

247. a) O montante no instante do último depósito é:

$$M = 700 \cdot \frac{(1{,}013)^{25} - 1}{0{,}013} = 20\,522{,}65$$

b) O montante 3 meses após o último depósito é:

$$M = 20\,522{,}65(1{,}013)^3 = 21\,333{,}49$$

248. Seja R o valor de cada depósito. Devemos ter:

$$30\,000 = R \cdot \frac{(1{,}012)^{40} - 1}{0{,}012} \Rightarrow 30\,000 = R \cdot (50{,}9553) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = 588{,}75$$

252. O valor aplicado mensalmente pelo sr. Ernesto é R$ 300,00.

a) O saldo procurado é o montante de 2 depósitos, isto é:

$$M = 300 \cdot \frac{(1{,}02)^2 - 1}{0{,}02} = 606$$

b) Seja *n* o número de depósitos procurado. Então:

$$7\,289 = 300 \cdot \frac{(1{,}02)^n - 1}{0{,}02} \Rightarrow 145{,}78 = 300(1{,}02)^n - 300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 300(1{,}02)^n = 445{,}78 \Rightarrow (1{,}02)^n = 1{,}4859 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \cdot \log(1{,}02) = \log(1{,}4859) \Rightarrow n = \frac{\log 1{,}4859}{\log 1{,}02} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{0{,}1720}{0{,}0086} = 20$$

253. Temos:

- O valor atual dos saques de R$ 1 800,00 por mês, durante 60 meses, é: $V = 1\,800 \cdot \frac{(1{,}012)^{60} - 1}{(1{,}012)^{60} \cdot 0{,}012} = 76\,673{,}58$
- O montante dos 48 depósitos deve ser igual a R$ 76 673,58. Portanto:

$$76\,673{,}58 = k \cdot \frac{(1{,}012)^{48} - 1}{0{,}012} \Rightarrow 76\,673{,}58 = k \cdot (64{,}4017) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 1\,190{,}55$$

CAPÍTULO III — Estatística descritiva

263. $a = \frac{48}{80} = 0{,}6 \Rightarrow c + e + g = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Como $c = 2e$ e $e = 5g$, escrevemos:

$2e + e + \frac{e}{5} = 0{,}4 \Rightarrow 3{,}2e = 0{,}4 \Rightarrow e = 0{,}125$

Daí segue que $c = 2 \cdot 0{,}125 = 0{,}25$ e $g = \frac{0{,}125}{5} = 0{,}025$.

Portanto: $b = 80 \cdot c = 80 \cdot 0{,}25 \Rightarrow b = 20$.

$d = 80 \cdot e = 80 \cdot 0{,}125 \Rightarrow d = 10$.

$f = 80 \cdot g = 80 \cdot 0{,}025 \Rightarrow f = 2$.

264. b) Seja *n* o número de novos atletas com altura mínima de 1,80 m. Como já há $6 + 1 = 7$ atletas nessas condições, devemos impor:

$\frac{7 + n}{25 + n} \geqslant 0{,}48 \underset{n > 0}{\Rightarrow} 7 + n \geqslant 12 + 0{,}48n \Rightarrow n \geqslant \frac{5}{0{,}52} \Rightarrow n \geqslant 9{,}61$

No mínimo, 10 jovens.

265. Temos:

- Valores maiores ou iguais a 600 reais $\Rightarrow 0{,}525 \cdot 160 = 84$. Assim: $d + f + g = 84$ (I)
- $\frac{2}{3}$ de $84 = 56$ eram inferiores a 800 reais $\Rightarrow d = 56$ (II)
- $f = 0{,}05 \cdot 160 = 8$ (III)

De (I), (II) e (III) segue que $g = 20$, e então $a = 16$.

Portanto: $b = \frac{a}{160} = \frac{16}{160} \Rightarrow b = 0{,}10$.

$c = \frac{60}{160} \Rightarrow c = 0{,}375$.

$e = \frac{d}{160} \Rightarrow e = \frac{56}{160} \Rightarrow e = 0{,}35$.

$h = \frac{g}{160} = \frac{20}{160} \Rightarrow h = 0{,}125$.

269. Turmas da manhã:

- não vão fazer cursinho: $\frac{216°}{360°} = 0{,}6 \cdot 340 = 204$
- vão fazer meio ano: $\frac{90°}{360°} = \frac{1}{4} \cdot 340 = 85$
- vão fazer o ano inteiro: $340 - 204 - 85 = 51$

Turmas da tarde:

- não vão fazer cursinho: $\frac{162°}{360°} = 0{,}45 \cdot 280 = 126$

- vão fazer meio ano: $\frac{126°}{360°} = 0{,}35 \cdot 280 = 98$
- vão fazer o ano inteiro: $280 - 126 - 98 = 56$

a) $204 + 126 = 330$

b) $56 - 51 = 5$

270. a) z: $\frac{36°}{360°} = \frac{1}{10} \cdot 400 = 40$

w: $400 - 230 - 120 - 40 = 10$

$40 - 10 = 30$

b) x: $\frac{230}{400} = 0{,}575 \cdot 360° = 207°$

y: $\frac{120}{400} = 0{,}3 \cdot 360° = 108°$

$207° - 108° = 99°$

271. Seja *x* o número de alunos.

- Na sondagem feita na 1ª série temos:
  H: $0{,}4 \cdot x$ B: $0{,}35 \cdot x$ E: $0{,}25 \cdot x$
- Na 3ª série:
  Migraram de H para E: $\frac{5}{16} \cdot 0{,}4x = 0{,}125x$
  Migraram de H para B: $\frac{3}{40} \cdot 0{,}4x = 0{,}03x$
  Assim, a nova distribuição é:
  H: $0{,}4x - 0{,}125x - 0{,}03x = 0{,}245x$ (24,5% do total)
  B: $0{,}35x + 0{,}03x = 0{,}38x$ (38% do total)
  E: $0{,}25x + 0{,}125x = 0{,}375x$ (37,5% do total)

a) Os novos ângulos são, portanto:
H: $0{,}245 \cdot 360° = 88{,}2°$; B: $0{,}38 \cdot 360° = 136{,}8°$ e
E: $360° - 88{,}2° - 136{,}8° = 135°$

b) $0{,}125 \cdot 400 = 50$ alunos

272. a) 25% de 4800 = 1200 calouros

b) 65% de 4800 = 3120 alunos; $\frac{1}{4}$ de 3120 = 780 alunos

c) $\frac{162°}{360°} = 0{,}45$; 45% de 65% $= 0{,}45 \cdot 0{,}65 = 0{,}2925 = 29{,}25\%$

d) $\frac{108°}{360°} = 0{,}3$ (só escola pública); $\frac{90°}{360°} = 0{,}25$ (as duas)

55% de 65% de 4800 $= 0{,}55 \cdot 0{,}65 \cdot 4800 = 1716$ calouros

273. a) 3) 1ª lacuna: $0{,}31 \cdot 40{,}1 = 12{,}43$ milhões

2ª lacuna: $0{,}31 \cdot 360° = 111{,}6°$

3ª lacuna: $0{,}26 \cdot 887 = 230{,}62$ bilhões

b) 1) V; C + D $\rightarrow$ 26% + 14% = 40% de 887 = 354,8 bilhões de reais alimentação, limpeza e higiene $\rightarrow 0{,}3 \cdot 354{,}8 = 106{,}44$ bilhões de reais

2) F; 8% de 354,8 = 28,384 bilhões de reais anuais

3) F; temos:

- C + D $\rightarrow$ 34% + 31% = 65% dos domicílios $= 0{,}65 \cdot 40{,}1 = 26{,}065$ milhões de domicílios
- gastos com lazer $\rightarrow$ 3% de 354,8 bilhões de reais (veja b-1) $= 0{,}03 \cdot 354{,}8 = 10{,}644$ bilhões de reais
- gastos de um único domicílio $\rightarrow \dfrac{10{,}644 \text{ bilhões}}{26{,}065 \text{ milhões}} =$

$$= \frac{10{,}644 \cdot 10^3 \text{ milhões}}{26{,}065 \text{ milhões}} = 408{,}36 \text{ reais anuais}$$

277. b) Sejam:

y = valor da conta

x = número de minutos de uso

França $\rightarrow y = 9 + 0{,}024x \xrightarrow{x\,=\,60} y = 9 + 1{,}44 = 10{,}44$ dólares

Argentina $\rightarrow y = 14{,}3 + 0{,}03x \xrightarrow{x\,=\,60} y = 14{,}3 + 1{,}8 = 16{,}10$ dólares

c) Brasil: Com aumento de 150%, a tarifa subirá para $2{,}5 \cdot 0{,}012 = 0{,}03$ US\$/min. Assim, $y = 6{,}5 + 0{,}03x$.

A condição do problema é:

$$\underbrace{6{,}5 + 0{,}03x}_{\text{conta no Brasil}} > \underbrace{9 + 0{,}024x}_{\text{conta na França}} \Rightarrow 0{,}006x > 2{,}5 \Rightarrow x > 416{,}\overline{6}$$

(a partir de 417 min)

278. b) área do campo: $100 \cdot 70 = 7\,000 \text{ m}^2$

número de campos: $\dfrac{230\,000 \text{ km}^2}{7\,000 \text{ m}^2} = \dfrac{230\,000 \cdot 10^6 \cancel{\text{m}^2}}{7\,000 \cancel{\text{m}^2}} = 32\,857\,142$

280. b) $p = \dfrac{\text{nº de casos favoráveis}}{\text{nº de casos possíveis}} = \dfrac{8 + 4}{20} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$

282. b) V; nº de mulheres = 48 + 63 + 27 + 22 = 160
nº de homens = 6 + 16 + 32 + 24 = 78 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{160}{160 + 78} = 0{,}672 = 67{,}2\%$$

d) F; $\dfrac{63}{27} = 2{,}\overline{3}$

O número é $133{,}\overline{3}$% maior.

e) F; n = nº de funcionárias que serão contratadas:

$$\frac{27 + n}{27 + 32 + n} > 0{,}55 \overset{n>0}{\Rightarrow} 27 + n > 32{,}45 + 0{,}55n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}45n > 5{,}45 \Rightarrow n > 12{,}\overline{1}$$

Será necessário contratar um mínimo de 13 funcionárias.

287. c) Vamos admitir que, em cada intervalo, o gasto de cada cliente corresponde ao limitante inferior do intervalo. Assim, uma estimativa é dada por:

$$15 \cdot 5 + 31 \cdot 10 + 20 \cdot 15 + 25 \cdot 20 + 10 \cdot 25 + 19 \cdot 30 =$$
$$= 2005 \text{ reais}$$

289. c)

Temperatura (°C)	Número de dias	Consumo diário	Consumo total
30° a 32°	$0{,}05 \cdot 80 = 4$	1 L	4 L
32° a 34°	$0{,}125 \cdot 80 = 10$	1,1 L	11 L
34° a 36°	$0{,}225 \cdot 80 = 18$	1,21 L	21,78 L
36° a 38°	$0{,}375 \cdot 80 = 30$	1,331 L	39,93 L
38° a 40°	$0{,}175 \cdot 80 = 14$	1,4641 L	20,49 L
40° a 42°	$0{,}05 \cdot 80 = 4$	1,61051 L	6,442 L

Ao todo, o carioca consumiu 4 L + 11 L + 21,78 L + 39,93 L + + 20,49 L + 6,442 L ≅ 103,65 L.

290. c) Suponha um grupo de 1000 pessoas. No grupo, há 191 desempregados e 809 empregados. A renda total referente aos trabalhadores ocupados é: $809 \cdot 873 = 706\,257{,}00$ reais. Assim, cada trabalhador (empregado ou não) receberia $\frac{706\,257}{100} \cong 706{,}26$.

Para os trabalhadores empregados, teríamos uma redução de $873 - 706{,}26 \cong 167$ reais.

292. 0) menor valor (fev. 1999): 10,20
maior valor (ago. 2000): 29,98 $\Rightarrow$ variação $= \frac{29{,}98 - 10{,}20}{10{,}20} =$
$= 1{,}9392 = 193{,}92\%$

2) De julho a agosto de 2000, o acréscimo no valor do barril foi de $29{,}98 - 28{,}51 = 1{,}47$ dólares. Supondo-o constante para os meses seguintes, o valor do barril em fevereiro de 2001 seria:
$29{,}98 + 6 \cdot 1{,}47 = 38{,}80$ dólares

295. d) Verdadeira.

- cheques → queda percentual: $\frac{203}{2600} \cong 0{,}078 = 7{,}81\%$

• cartões → aumento percentual: $\dfrac{91}{1028} \cong 0{,}088 = 8{,}85\%$

Dentro da margem considerada (dois pontos percentuais para mais ou para menos), a queda nas operações com cheque correspondeu ao ganho nas operações com cartões.

299. $\bar{x}_A = \dfrac{x + 6 + 3 + 4 + 5}{5} = \dfrac{x + 18}{5}$

$\bar{x}_B = \dfrac{9 + 1 + 4 + 8 + x + 6 + 11 + 3}{8} = \dfrac{42 + x}{8}$

a) $\bar{x}_A = \bar{x}_B \Rightarrow \dfrac{x + 18}{5} = \dfrac{42 + x}{8} \Rightarrow x = 22$

b) $\begin{cases} \bar{x}_A \leqslant 4 \Rightarrow \dfrac{x + 18}{5} \leqslant 4 \Rightarrow x \leqslant 2 \\ \bar{x}_B \geqslant 5 \Rightarrow \dfrac{42 + x}{8} \geqslant 5 \Rightarrow x \geqslant -2 \end{cases}$

Os possíveis inteiros são -2, -1, 0, 1 e 2.

301. b) $\bar{x} = \dfrac{52 + a}{6} \Rightarrow 12 \leqslant \dfrac{52 + a}{6} < 13 \Rightarrow 72 \leqslant 52 + a < 78 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20 \leqslant a < 26$

305. Sejam *x* e 3x os números acrescentados.

• Antes do acréscimo: Σ números $= 55 \cdot 28 = 1540$

• Após o acréscimo: Σ' números $= 1540 + x + 3x$

Temos:

$\bar{x}' = \dfrac{\Sigma' \text{ números}}{55 + 2} \Rightarrow 30 = \dfrac{1540 + 4x}{57} \Rightarrow x = 42{,}5$ e $3x = 127{,}5$

306. a) Σ números (inicial): $45 \cdot 6 = 270$; $\bar{x}$ (inicial) $= 6$

Σ números (final): $270 + x \Rightarrow \bar{x}$ (final) $= \dfrac{270 + x}{46}$

$\downarrow$ aumenta 3 unidades (ou 50%)

$9 = \dfrac{270 + x}{46} \Rightarrow x = 144$

307. b) Turma A $\rightarrow \bar{x}_A = \dfrac{\Sigma \text{ notas (A)}}{n} \Rightarrow 6{,}8 = \dfrac{\Sigma \text{ notas (A)}}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma$ notas (A) $= 6{,}8n$ (1)

Turma B $\rightarrow \bar{x}_B = \dfrac{\Sigma \text{ notas (B)}}{m} \Rightarrow 5{,}2 = \dfrac{\Sigma \text{ notas (B)}}{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma$ notas (B) $= 5{,}2m$ (2)

Turmas A + B $\rightarrow \bar{x} = \dfrac{\Sigma \text{ notas}}{n + m} \Rightarrow 5{,}8 = \dfrac{\Sigma \text{ notas}}{n + m} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma$ notas $= 5{,}8(n + m)$ (3)

De (1), (2) e (3) vem:

Σ notas $= \Sigma$ notas (A) $+ \Sigma$ notas (B)
$5{,}8(n + m) = 6{,}8n + 5{,}2m \Rightarrow 0{,}6m = n$
Por hipótese, $m = n + 14$. Daí:
$0{,}6 \cdot (n + 14) = n \Rightarrow n = 21$ e $m = 35$

308. Temos:
• Σ "pesos" (inicial) $= 25 \cdot 84 = 2\,100$ kg
• Σ "pesos" (final) $= 2\,100 + 90 \cdot n$
Por hipótese, a média final dos "pesos" é 85 kg.
Temos: $85 = \dfrac{2\,100 + 90n}{25 + n} \Rightarrow 5n = 25 \Rightarrow n = 5$

309. Σ números (inicial) $= 26 \cdot 15 = 390$
Seja *n* o número retirado:
Σ números (final) $= 390 - n$. Daí:
$\bar{x}\,(\text{final}) = \dfrac{390 - n}{15 - 1} \Rightarrow 25 = \dfrac{390 - n}{14} \Rightarrow n = 40$

311. Devemos ter:
$$\frac{2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3}}{4} = 60 \Rightarrow \frac{2^n + 2^n \cdot 2 + 2^n \cdot 2^2 + 2^n \cdot 2^3}{4} = 60 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2^n \cdot (1 + 2 + 4 + 8)}{4} = 60 \Rightarrow \frac{2^n \cdot 15}{4} = 60 \Rightarrow 2^n = 16 \Rightarrow n = 4$$

312. Vamos representar os números por:
$x - 18, x - 12, x - 6, x, x + 6, x + 12, x + 18$
Como $\bar{x} = 4$, segue que a soma desses números é $7 \cdot 4 = 28$, isto é:
$x - \cancel{18} + x - \cancel{12} + x - \cancel{6} + x + x + \cancel{6} + x + \cancel{12} + x + \cancel{18} = 28 \Rightarrow$
$\Rightarrow 7x = 28 \Rightarrow x = 4$
A P.A. é: $(-14, -8, -2, 4, 10, 16, 22)$

313.
$$\bar{x} = \frac{\log 2 + \log 3 + \log 4 + \log 5}{4} = \frac{\log (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)}{4} = \frac{\log 120}{4} =$$
$$= \frac{\log (1{,}2 \cdot 100)}{4} = \frac{\log 1{,}2 + \log 100}{4} \simeq \frac{0{,}08 + 2}{4} \simeq \frac{2{,}08}{4} \simeq 0{,}52$$

315. c) $\begin{cases} A = 2 \cdot B \\ B = 3 \cdot C \end{cases} \Rightarrow A = 6C$ e o total de habitantes é: $6C + 3C + C = 10C$
Daí, a proporção de habitantes que vivem em A é $\dfrac{6C}{10C} = 0{,}6$;
em B é $\dfrac{3C}{10C} = 0{,}3$ e em C é 0,1.
Assim: $\bar{x} = 530 \cdot 0{,}6 + 600 \cdot 0{,}3 + 700 \cdot 0{,}1 = 568$ reais

316. Considere as seguintes proporções de trabalhadores:
A: 0,7; B: *p* e C: $0{,}3 - p$
$\bar{x} = 0{,}7 \cdot 530 + 600 \cdot p + 700 \cdot (0{,}3 - p)$

$560 = 371 + 600p + 210 - 700p \Rightarrow 100p = 21 \Rightarrow p = 0{,}21$
Daí, os percentuais pedidos são B = 21% e C = 9%.

319. b) Com a realização dos jogos de sábado, a nova média de gols é dada por:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot (4 + n) + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1}{32 + n}$$

Isto é:

$$2{,}5 = \frac{6 + 16 + 12 + 3n + 20 + 15 + 6}{32 + n} \Rightarrow 2{,}5 = \frac{75 + 3n}{32 + n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 80 + 2{,}5n = 75 + 3n \Rightarrow n = 10$$

323. Como o conteúdo médio do lote está mais próximo do conteúdo médio do fabricante B, concluímos que este vendeu mais copos ao supermercado. Assim, A vendeu *n* copos e B, n + 40 copos. Temos:

$$\bar{x} = \frac{190 \cdot n + 195 \cdot (n + 40)}{n + (n + 40)} \Rightarrow 193{,}5 = \frac{385n + 7\,800}{2n + 40} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 387n + 7\,740 = 385n + 7\,800 \Rightarrow n = 30 \text{ (A) e } n + 40 = 70 \text{ (B)}$$

327. Média inicial das idades: $4 + \frac{3}{12} = 4{,}25$ anos $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma$ idades (inicial) $= 25 \cdot 4{,}25 = 106{,}25$ anos
Com a entrada de *n* crianças, cada uma com $4 + \frac{9}{12} = 4{,}75$ anos, temos que:
Σ idades (final) $= 106{,}25 + 4{,}75 \cdot n$
Daí:

$$\bar{x} \text{ idades (final)} = 4 + \frac{4}{12} = \frac{13}{3} \text{ anos} \Rightarrow \frac{13}{3} = \frac{106{,}25 + 4{,}75 \cdot n}{25 + n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 325 + 13n = 318{,}75 + 14{,}25n \Rightarrow 6{,}25 = 1{,}25n \Rightarrow n = 5$$

328. b) Computadas as duas primeiras horas, temos o seguinte número de pessoas colaboradoras:

- valor mínimo:
  $(0{,}48 \cdot 50000) + \left(\frac{1}{3} \cdot 30000\right) = 24000 + 10000 = 34000$
- valor intermediário: $(0{,}37 \cdot 50\,000) + x = 18\,500 + x$
- valor máximo: $(0{,}15 \cdot 50\,000) + (20\,000 - x) = 27\,500 - x$

Então:

$$\bar{x} = 22{,}8 \Rightarrow 22{,}8 = \frac{34000 \cdot 10 + (18500 + x) \cdot 20 + (27500 - x) \cdot 50}{80000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 22{,}8 = \frac{2\,085\,000 - 30x}{80\,000} \Rightarrow 30x = 261\,000 \Rightarrow x = 8\,700$$

Assim, 8 700 pessoas doaram 20 reais e 11 300 pessoas doaram 50 reais, durante a segunda hora.

330. Temos:

- $\sum_{i=1}^{15} a_i = 15 \cdot 24 = 360$

- $\sum_{i=1}^{15}(a_i + i) = (a_1 + 1) + (a_2 + 2) + \ldots + (a_{15} + 15) =$

$$= \sum_{i=1}^{15} a_i + \underbrace{(1 + 2 + 3 + \ldots + 15)}_{\text{soma dos termos de uma P.A.}} = 360 + \frac{(1 + 15) \cdot 15}{2} = 480$$

Assim, a média pedida é $\frac{480}{15} = 32$.

331. a) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ as notas dos aprovados:

$$\frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{12} = 77 \Rightarrow \sum_{i=1}^{12} x_i = 924 \quad (1)$$

Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_8$ as notas dos reprovados:

$$\frac{\sum_{i=1}^{8} y_i}{8} = 65 \Rightarrow \sum_{i=1}^{8} y_i = 520 \quad (2)$$

Assim, a nota média da classe toda é:

$$\frac{\sum_{i=1}^{12} x_i + \sum_{i=1}^{8} y_i}{12 + 8} = \frac{924 + 520}{20} = 72{,}2$$

b) Seja *n* ($0 \leqslant n \leqslant 8$) o número de alunos inicialmente reprovados que passaram a ter nota para aprovação. Vamos supor também que, antes dessa atribuição, as notas desses *n* alunos somavam S. Assim, temos:

- Notas dos aprovados:

$$\underbrace{x_1 + 5, x_2 + 5, \ldots, x_{12} + 5}_{\substack{\text{já haviam sido aprovados} \\ \text{e receberam 5 pontos a mais}}} \quad , \quad \underbrace{y_1 + 5, y_2 + 5, \ldots, y_n + 5}_{\substack{\text{são as notas dos } n \text{ alunos} \\ \text{que haviam sido reprovados}}}$$

$$\Big\downarrow (1) \qquad\qquad\qquad \Big\downarrow (2)$$

a soma das notas é: $924 + 5 \cdot 12$; a soma das notas é: $S + 5 \cdot n$

Daí, a média dos aprovados é:

$$\frac{(924 + 5 \cdot 12) + (S + 5n)}{12 + n} = 80 \Rightarrow S = 75n - 24 \quad (3)$$

- Notas dos reprovados:

Cada um dos $8 - n$ alunos reprovados recebeu 5 pontos a mais; antes da atribuição, a soma de suas notas, por (2) e pelas considerações anteriores, é $520 - S$. Logo, a média dos reprovados é:

$$\frac{(8 - n) \cdot 5 + 520 - S}{8 - n} = 68{,}8 \Rightarrow S = 9{,}6 + 63{,}8n \quad (4)$$

De (3) e (4), segue que: $75n - 24 = 9{,}6 + 63{,}8n \Rightarrow n = 3$

333. Seja *p* a idade do jogador mais velho.

$$\underbrace{(\bar{x})'}_{\text{média após a substituição}} = \underbrace{\bar{x}}_{\text{média inicial}} - 2 \Rightarrow \frac{\Sigma \text{ idades (inicial)} - p + 16}{11} = \frac{\Sigma \text{ idades (inicial)}}{11} - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\Sigma \text{ idades (inicial)}} - p + 16 = \cancel{\Sigma \text{ idades (inicial)}} - 22 \Rightarrow p = 38 \text{ anos}$$

336. Os elementos do conjunto {1, 2, 3, ..., 201} são termos de uma P.A. de razão 1, cuja soma é $\frac{(1 + 201) \cdot 201}{2} = 20\,301$.

A média dos elementos restantes é: $101{,}45 = \frac{20\,301 - m}{200} \Rightarrow m = 11$

$m + 201 = 11 + 201 = 212$

337. Seja Σ a soma dos valores do conjunto inicial e $\bar{x}$ a média correspondente. Temos:

$(\bar{x})' = \bar{x} + 4 \Rightarrow \frac{\Sigma + 119}{n + 1} = \frac{\Sigma}{n} + 4 \quad (1)$

$(\bar{x})'' = \bar{x} - 1 \Rightarrow \frac{\Sigma - 54}{n - 1} = \frac{\Sigma}{n} - 1 \quad (2)$

$(1) \Rightarrow n(\Sigma + 119) = \Sigma(n + 1) + 4(n + 1) \cdot n \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = \Sigma + 4n^2 - 115n \quad (3)$

$(2) \Rightarrow n(\Sigma - 54) = \Sigma(n - 1) - n(n - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = -\Sigma - n^2 + 55n \quad (4)$

a) Somando-se, membro a membro, (3) e (4), vem:
$0 = 3n^2 - 60n \Rightarrow n = 20$

b) Logo, em (3), vem:
$0 = \Sigma + 4 \cdot 400 - 115 \cdot 20 \Rightarrow \Sigma = 700$
A média inicial é $\frac{700}{20} = 35$.

343. Temos:

Nº de filhos	0	1	2	3	4
Porcentagem	$\frac{108°}{360°} = 30\%$	$\frac{135°}{360°} = 37{,}5\%$	$\frac{72°}{360°} = 20\%$	$\frac{36°}{360°} = 10\%$	$\frac{9°}{360°} = 2{,}5\%$
Nº de funcionários	240	300	160	80	20

b) Como há 800 valores, a mediana é a média aritmética entre os valores 400 e 401, isto é, $\frac{1 + 1}{2} = 1$ filho. (Observe que da 1ª à

240ª posição, os valores são iguais a 0, e da 241ª à 540ª posição, os valores são iguais a 1.)

344. a) $\dfrac{x_{40} + x_{41}}{2} = \dfrac{2 + 2}{2} = 2$

b) Teríamos 80 + 18 = 98 peças assim distribuídas, em relação ao número de defeitos:

$$\underbrace{0 - 0 - \ldots - 0}_{\substack{1^{\text{a}} \text{ à } 12^{\text{a}} \\ \text{posição}}} - \underbrace{1 - 1 - \ldots - 1}_{\substack{13^{\text{a}} \text{ à } 50^{\text{a}} \\ \text{posição}}} - \underbrace{2 - 2 - \ldots - 2}_{\substack{51^{\text{a}} \text{ à } 74^{\text{a}} \\ \text{posição}}} - \underbrace{3 - 3 - \ldots - 3}_{\substack{75^{\text{a}} \text{ à } 90^{\text{a}} \\ \text{posição}}} -$$

$$- \underbrace{4 - 4 - \ldots - 4}_{\substack{91^{\text{a}} \text{ à } 98^{\text{a}} \\ \text{posição}}}$$

$$\text{Me} = \frac{x_{49} + x_{50}}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

c) Para obtermos o menor valor possível para *n* é preciso impor que o valor 3 ocupe a posição central, quando todos os valores estão colocados em ordem crescente:

$$\underbrace{0 - \ldots - 0}_{12 \text{ vezes}} - \underbrace{1 - \ldots - 1}_{20 \text{ vezes}} - \underbrace{2 - \ldots - 2}_{24 \text{ vezes}} - 3 - \ldots$$

$$\longleftarrow \text{56 valores} \longrightarrow \boxed{\substack{57^{\text{a}} \\ \text{posição}}} \longleftarrow \text{56 valores} \longrightarrow$$

Desse modo, teríamos 56 + 1 + 56 = 113 valores, o que sugere que o valor de *n* seja 113 − 80 = 33.

346. a) Como há 6 valores, a mediana é a média entre os 3º e 4º valores:

$$\frac{2^{n-2} + 2^{n-3}}{2} = 6 \Rightarrow \frac{2^n \cdot (2^{-2} + 2^{-3})}{2} = 6 \Rightarrow \frac{2^n \cdot \frac{3}{8}}{2} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^n = 32 \Rightarrow n = 5$$

347. 3) Para os 30 dias temos:

Nº de peças defeituosas	1	2	3	4	5	6	7
Frequência absoluta	4	5	6	5	5	3	2

$$\text{Me} = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = \frac{3 + 4}{2} = 3{,}5$$

Para os 10 primeiros dias:

Nº de peças defeituosas	1	2	3	4	5	6
Frequência absoluta	1	2	2	3	1	1

$$Me = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{3 + 4}{2} = 3{,}5$$

348. b) Para que a mediana seja 1,5 é preciso que os valores referentes ao número anual de visitas, quando colocados em ordem crescente, apresentem a 140ª posição igual a 1 e a 141ª posição igual a 2, de modo que $\frac{1 + 2}{2} = 1{,}5$.

Como há 63 valores iguais a zero, as posições 64ª a 140ª devem ser iguais a 1. Assim, deve haver 77 valores iguais a 1, o que indica que 105 − 77 = 28 pessoas da amostra devem passar a visitar o dentista duas vezes ao ano.

353.

$$\bar{x} = \frac{8 + 10 + x}{3} = 6 + \frac{x}{3}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{3} \cdot \left[\left(8 - 6 - \frac{x}{3}\right)^2 + \left(10 - 6 - \frac{x}{3}\right)^2 + \left(x - 6 - \frac{x}{3}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[\left(2 - \frac{x}{3}\right)^2 + \left(4 - \frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{2x}{3} - 6\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[4 - \frac{4x}{3} + \frac{x^2}{9} + 16 - \frac{8x}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{4x^2}{9} - 8x + 36\right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{2x^2}{3} - 12x + 56\right]$$

Daí:

$$\frac{26}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{2x^2}{3} - 12x + 56\right] \Rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 15$$

356.

Pontuação	0	0,5	1
Nº de alunos	$0{,}4 \cdot 60 = 24$	$0{,}35 \cdot 60 = 21$	$0{,}25 \cdot 60 = 15$

a) $Me = \frac{x_{30} + x_{31}}{2} = \frac{0{,}5 + 0{,}5}{2} = 0{,}5$

b) $\bar{x} = \frac{0 \cdot 24 + 0{,}5 \cdot 21 + 1 \cdot 15}{60} = 0{,}425$

$$\sigma^2 = (0{,}425 - 0)^2 \cdot 0{,}4 + (0{,}425 - 0{,}5)^2 \cdot 0{,}35 + (0{,}425 - 1)^2 \cdot 0{,}25$$

$$\sigma^2 = 0{,}07225 + 0{,}001968 + 0{,}0826 \cong 0{,}157$$

358. a) $\bar{x} = \frac{3 \cdot 2 + (n - 3) \cdot 5}{n} = \frac{5n - 9}{n} = 5 - \frac{9}{n}$

b) $\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \left\{\left[2 - \left(5 - \frac{9}{n}\right)\right]^2 \cdot 3 + \left[5 - \left(5 - \frac{9}{n}\right)\right]^2 \cdot (n - 3)\right\}$

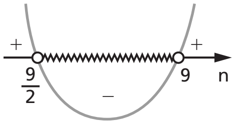
$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \left[\left(\frac{9}{n} - 3\right)^2 \cdot 3 + \left(\frac{9}{n}\right)^2 \cdot (n - 3)\right]$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \left[\cancel{\frac{243}{n^2}} - \frac{162}{n} + 27 + \frac{81}{n} - \cancel{\frac{243}{n^2}}\right]$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \left(-\frac{81}{n} + 27\right) = -\frac{81}{n^2} + \frac{27}{n}$$

A condição é $\sigma^2 > 2$, ou seja:

$$-\frac{81}{n^2} + \frac{27}{n} > 2 \underset{n > 0}{\Rightarrow} -81 + 27n > 2n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 27n + 81 < 0 \Rightarrow$$ 

$$\Rightarrow \frac{9}{2} < n < 9$$

O maior valor inteiro que verifica tal condição é $n = 8$.

361. b) Vamos usar a expressão alternativa para o cálculo da variância.

De 1988 a 1993:

- $\sum_{i=1}^{6} x_i = 71 + 62 + 51 + 81 + 81 + 89 = 435$
- $\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 71^2 + 62^2 + 51^2 + 81^2 + 81^2 + 89^2 = 32\,529$

$$\sigma^2 = \frac{1}{6} \cdot \left[32\,529 - \frac{435^2}{6}\right] = \frac{991{,}5}{6} = 162{,}25 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sigma \cong 12{,}86$ (ocupações)

De 1996 a 2000:

- $\sum_{i=1}^{5} x_i = 398 + 463 + 599 + 581 + 390 = 2\,431$
- $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 398^2 + 463^2 + 599^2 + 581^2 + 390^2 = 1\,221\,235$

$$\sigma^2 = \frac{1}{5} \cdot \left[1\,221\,235 - \frac{2\,431^2}{5}\right] = \frac{39\,282{,}8}{5} = 7\,856{,}56 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sigma \cong 88{,}6$ (ocupações)

363. 1º modo: Intuitivamente, como a média entre 4, 1, 8 e 7 é $\frac{20}{4} = 5$, a variância será mínima se for acrescentado a esse conjunto um valor que coincida com a média, isto é, $n = 5$. (Observe que o desvio desse valor, em relação à média, seria igual a zero.)

Nesse caso, $\sigma^2 = \dfrac{(4-5)^2 + (1-5)^2 + (8-5)^2 + (7-5)^2 + \cancelto{0}{(5-5)^2}}{5} =$

$$= \frac{1 + 16 + 9 + 4}{5} = 6$$

2º modo:

$$\bar{x} = \frac{4 + 1 + 8 + 7 + n}{5} = 4 + \frac{n}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{5} \cdot \left[\left(4 - 4 - \frac{n}{5}\right)^2 + \left(1 - 4 - \frac{n}{5}\right)^2 + \left(8 - 4 - \frac{n}{5}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(7 - 4 - \frac{n}{5}\right)^2 + \left(n - 4 - \frac{n}{5}\right)^2\right]$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{n^2}{25} + 9 + \frac{6n}{5} + \frac{n^2}{25} + 16 - \frac{8n}{5} + \frac{n^2}{25} + 9 - \frac{6n}{5} + \frac{n^2}{25} + \right.$$

$$\left. + \frac{16n^2}{25} - \frac{32n}{5} + 16\right] = \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{4n^2}{5} - 8n + 50\right] = \frac{4n^2}{25} - \frac{8n}{5} + 10$$

A função quadrática $\frac{4n^2}{25} - \frac{8n}{5} + 10$ assume o valor mínimo se

$$n = \frac{-b}{2a} = \frac{-\left(-\frac{8}{5}\right)}{2 \cdot \frac{4}{25}} = 5$$

Esse valor é: $\frac{4}{25} \cdot 5^2 - 8 \cdot \frac{5}{5} + 10 = 4 - 8 + 10 = 6$

368. Sejam $x_1, x_2, ..., x_7$ as receitas diárias da pastelaria.

Temos:

- $\overline{x} = 1\,200 \Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7} = 1200 \Rightarrow \sum_{i=1}^{7} x_i = 8\,400$
- $\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 10\,086\,300$

$$\sigma^2 = \frac{1}{7} \cdot \left[10\,086\,300 - \frac{8\,400^2}{7}\right] = \frac{6\,300}{7} = 900 \Rightarrow \sigma = 30 \text{ reais}$$

369. Temos:

- Para o conjunto {2, 6, 5, 7}:

$$\overline{x} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{(2-5)^2 + (6-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2}{4} = \frac{9 + 1 + 4}{4} = 3{,}5$$

- Para o conjunto {2, 6, 5, 7, n}:

$$(\overline{x})' = \frac{20 + n}{5} = 4 = \frac{n}{5}$$

$$(\sigma^2)' = \frac{1}{5} \cdot \left[\left(4 + \frac{n}{5} - 2\right)^2 + \left(4 + \frac{n}{5} - 6\right)^2 + \left(4 + \frac{n}{5} - 5\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(4 + \frac{n}{5} - 7\right)^2 + \left(4 + \frac{n}{5} - n\right)^2\right] = \frac{1}{5} \cdot \left[4 + \cancel{\frac{4n}{5}} + \frac{n^2}{25} + \frac{n^2}{25} - \cancel{\frac{4n}{5}} + \right.$$

$$+ 4 + \underbrace{\frac{n^2}{25}} - \frac{2n}{5} + 1 + \underbrace{\frac{n^2}{25}} - \frac{6n}{5} + 9 + 16 - \frac{32n}{5} + \underbrace{\frac{16n^2}{25}}\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{4n^2}{5} - 8n + 34\right]$$

Devemos ter: $(\sigma^2)' = \sigma^2 + 3{,}3 = 3{,}5 + 3{,}3 = 6{,}8$. Isto é:

$$\cancel{6{,}8} = \frac{4n^2}{25} - \frac{8n}{5} + \frac{\cancel{34}}{\cancel{5}} \Rightarrow \frac{4n^2}{25} - \frac{8n}{5} = 0 \Rightarrow \frac{4n}{5}\left(\frac{n}{5} - 2\right) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow n = 0$ ou $n = 10$

370. Valores originais: $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $\bar{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$ (*) e

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \; (**)$$

Novos valores:

$$\frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma}, \frac{x_2 - \bar{x}}{\sigma}, \ldots, \frac{x_n - \bar{x}}{\sigma}$$

A nova média $(\bar{x})'$ é:

$$(\bar{x})' = \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma} + \frac{x_2 - \bar{x}}{\sigma} + \ldots + \frac{x_n - \bar{x}}{\sigma}\right]$$

$$(\bar{x})' = \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sigma} - \frac{n \cdot \bar{x}}{\sigma}\right]$$

$$(\bar{x})' \overset{(*)}{=} \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{n \cdot \bar{x}}{\sigma} - \frac{n \cdot \bar{x}}{\sigma}\right] = 0$$

Como a média passou a ser zero, a nova variância é:

$$(\sigma^2)' = \frac{1}{n} \cdot \left[\left(\frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \bar{x}}{\sigma}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_n - \bar{x}}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$(\sigma^2)' = \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{\sigma^2}\right]$$

$$(\sigma^2)' = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \left[\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}\right]$$

E, por (**): $(\sigma^2)' = \dfrac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = 1$

371. a) $M(x) = \dfrac{(a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \ldots + (a_n - x)^2}{n}$

$$M(x) = \frac{(a_1^2 - 2a_1x + x^2) + (a_2^2 - 2a_2x + x^2) + \ldots + (a_n^2 - 2a_nx + x^2)}{n}$$

$$M(x) = \frac{(x^2 + x^2 + \ldots + x^2) - 2a_1x - 2a_2x - \ldots - 2a_nx + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}$$

$$M(x) = \frac{n \cdot x^2}{n} - 2x \underbrace{\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{n}}_{= \bar{a}} + \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}$$

$$M(x) = x^2 - 2x \cdot \bar{a} + \left(\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}\right)$$

Essa função de 2º grau assume o valor mínimo para

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2\bar{a})}{2 \cdot 1} = \bar{a} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)$$

b) Quando $x = \bar{a}$, voltando ao início do exercício, temos que o valor mínimo para M(x) é:

$$M(x)_{mín} = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \ldots + (a_n - \bar{a})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})^2}{n}$$

372. b) Com uma redução de 15%, cada valor fica multiplicado por 0,85 (pois cada valor se reduz a 85% do valor original).
Assim, a variância fica multiplicada por $0{,}85^2 = 0{,}7225$, isto é, ela passa a ser $47 \cdot 0{,}7225 \cong 34$.

378. a) Sem os módulos, teríamos:

$$DM(x) = \frac{x_1 - \bar{x} + x_2 - \bar{x} + \ldots + x_n - \bar{x}}{n} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - \frac{\overbrace{(\bar{x} + \bar{x} + \ldots + \bar{x})}^{n \text{ vezes}}}{n} = \bar{x} - n \cdot \frac{\bar{x}}{n} = 0$$

b) Vamos verificar em que condições ocorre a igualdade:

$|x_i - \bar{x}| = (x_i - \bar{x})^2$

Da definição de módulo, $|x_i - \bar{x}| = \begin{cases} x_i - \bar{x};\ \text{se } x_i - \bar{x} \geqslant 0, \text{ isto é, } x_i \geqslant \bar{x} \\ \bar{x} - x_i;\ \text{se } x_i \leqslant \bar{x} \end{cases}$

1º caso: $|x_i - \bar{x}| = x_i - \bar{x}$

$x_i - \bar{x} = (x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow x_i - \bar{x} = x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_i^2 - (2\bar{x} + 1)x_i + (\bar{x} + \bar{x}^2) = 0$

Resolvendo essa equação na variável x_i, temos:

$\Delta = [-(2\bar{x} + 1)]^2 - 4 \cdot (\bar{x} + \bar{x}^2) = 1$

$$x_i = \frac{2\bar{x} + 1 \pm 1}{2} \begin{cases} x_i = \bar{x} + 1 \Rightarrow x_i - \bar{x} = 1 \\ x_i = \bar{x} \end{cases}$$

2º caso: $|x_i - \bar{x}| = \bar{x} - x_i$

$\bar{x} - x_i = (x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow \bar{x} - x_i = x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_i^2 + x_i(1 - 2\bar{x}) + (\bar{x}^2 - \bar{x}) = 0$

$\Delta = (1 - 2\bar{x})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\bar{x}^2 - \bar{x}) = 1$

$$x_i = \frac{-1 + 2\bar{x} \pm 1}{2} \begin{cases} x_i = \bar{x} \\ x_i = \bar{x} - 1 \Rightarrow x_i - \bar{x} = -1 \end{cases}$$

Reunindo os dois casos, concluímos que a igualdade ocorre quando $x_i = \bar{x}, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ou $|x_i - \bar{x}| = 1$.

383. A mediana é um valor que se encontra no 3º intervalo, pois os dois primeiros intervalos concentram 44% dos valores e os três primeiros intervalos concentram 64% dos valores. Temos:

$$\frac{Me - 5}{50\% - 44\%} = \frac{t - 5}{20\%} \Rightarrow \frac{6{,}2 - 5}{6\%} = \frac{t - 5}{20\%} \Rightarrow t = 9$$

384. a) Sejam p% e (28 − p)% as porcentagens correspondentes aos intervalos 3 a 5 reais e 5 a 7 reais, respectivamente. (Observe que 72% + p% + (28 − p)% = 100%.) Temos:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 72 + 4 \cdot p + 6 \cdot (28 - p)}{100}$$

$$2{,}8 = \frac{144 + 4p + 168 - 6p}{100} \Rightarrow 280 = 312 - 2p \Rightarrow p = 16$$

As porcentagens pedidas são 16% e 12%.

b) $$\sigma^2 = \frac{(2 - 2{,}8)^2 \cdot 72 + (4 - 2{,}8)^2 \cdot 16 + (6 - 2{,}8)^2 \cdot 12}{100}$$

$$\sigma^2 = \frac{46{,}08 + 23{,}04 + 122{,}88}{100} = 1{,}92 \text{ (real)}^2$$

385. Arrecadação mínima: vamos supor que 30 apartamentos atrasaram exatamente um dia, 24 apartamentos atrasaram exatamente 10 dias e 18 apartamentos atrasaram 19 dias. Assim, a arrecadação é:

$$48 \cdot 200 + 30 \cdot \underbrace{(1{,}005 \cdot 200)}_{\text{1 dia de multa}} + 24 \cdot \underbrace{(1{,}05 \cdot 200)}_{\text{10 dias de multa}} + 18 \cdot \underbrace{(1{,}095 \cdot 200)}_{\text{19 dias de multa}}$$

$$9\,600 + 6\,030 + 5\,040 + 3\,942 = 24\,612 \text{ reais}$$

Arrecadação máxima: vamos supor que 30 apartamentos atrasaram 9 dias, 24 apartamentos atrasaram 18 dias e 18 apartamentos atrasaram 27 dias.

Assim, a arrecadação é:

$$48 \cdot 200 + 30 \cdot \underbrace{(1{,}045 \cdot 200)}_{\text{9 dias de multa}} + 24 \cdot \underbrace{(1{,}09 \cdot 200)}_{\text{18 dias de multa}} + 18 \cdot \underbrace{(1{,}135 \cdot 200)}_{\text{27 dias de multa}}$$

$$9\,600 + 6\,270 + 5\,232 + 4\,086 = 25\,188 \text{ reais}$$

386. b) Universidades federais:

$$\bar{x} = \frac{326{,}5 \cdot 0{,}097 + 982 \cdot 0{,}335 + 2\,265{,}5 \cdot 0{,}28 + 5\,285{,}5 \cdot 0{,}187 + 8\,775 \cdot 0{,}057}{0{,}097 + 0{,}335 + 0{,}28 + 0{,}187 + 0{,}057}$$

$$\bar{x} \cong \frac{31{,}67 + 328{,}97 + 634{,}34 + 988{,}39 + 500{,}17}{0{,}957} \cong 2\,595{,}13 \text{ reais}$$

Faculdades particulares:

$$\bar{x} = \frac{326{,}5 \cdot 0{,}045 + 982 \cdot 0{,}289 + 2\,265{,}5 \cdot 0{,}315 + 5\,285{,}5 \cdot 0{,}224 + 8\,775 \cdot 0{,}091}{0{,}045 + 0{,}289 + 0{,}315 + 0{,}224 + 0{,}091}$$

$$\bar{x} \cong \frac{14{,}69 + 283{,}79 + 713{,}64 + 1\,183{,}95 + 798{,}53}{0{,}964} \cong \frac{2\,994{,}6}{0{,}964} \cong 3\,106{,}43 \text{ reais}$$

387. b) Para encontrar a mediana, observemos que as duas primeiras classes concentram exatamente $\frac{34 + 41}{150} = 50\%$ das ocorrências. Assim, pela definição, a mediana é 115 km/h. (Este é o valor limitante entre o segundo e terceiro intervalos.)

c)

Velocidade (km/h)	Valor da multa (reais)	Frequência absoluta
$101 \vdash 108$	180	34
$108 \vdash 115$	$1,2 \cdot 180 = 216$	41
$115 \vdash 122$	$1,2 \cdot 216 = 259,20$	35
$122 \vdash 129$	$1,2 \cdot 259,2 = 311,04$	22
$129 \vdash 136$	$1,2 \cdot 311,04 = 373,25$	18

Observe que os valores das multas são termos de uma P.G. de razão 1,2.

Daí, o valor médio das multas é:

$$\frac{180 \cdot 34 + 216 \cdot 41 + 259,20 \cdot 35 + 311,04 \cdot 22 + 373,25 \cdot 18}{150} \cong 250,73 \text{ reais}$$

391. b) 1991: $\bar{x} = 0,259 \cdot 0,55 + 0,444 \cdot 0,65 + 0,296 \cdot 0,75 = 0,653$

2000: $\bar{x} = 0,259 \cdot 0,65 + 0,556 \cdot 0,75 + 0,185 \cdot 0,85 = 0,743$

c) $\frac{0,743}{0,653} \cong 1,138 \Rightarrow 1,138 - 1 = 0,138$ ou 13,8% de aumento.

d) $\sigma^2 = (0,65 - 0,743)^2 \cdot 0,259 + (0,75 - 0,743)^2 \cdot 0,556 +$
$+ (0,85 - 0,743)^2 \cdot 0,185$

$\sigma^2 = 0,00224 + 0,0000272 + 0,002118$

$\sigma^2 = 0,0043 \Rightarrow \sigma \cong 0,066$

392. c) A frequência absoluta do intervalo $80 \vdash 90$ passaria a ser $9 + n$ (e o total de dias de todo o período passaria a ser $50 + n$).

A condição é: $\bar{x} \geqslant 0,8$. Isto é:

$$\frac{0,35 \cdot 2 + 0,45 \cdot 4 + 0,55 \cdot 10 \cdot 0,65 \cdot 13 + 0,75 \cdot 12 + 0,85 \cdot (9 + n)}{50 + n} \geqslant$$
$$\geqslant 0,8$$

$$\frac{33,1 + 0,85n}{50 + n} \geqslant 0,8 \overset{n > 0}{\Rightarrow} 33,1 + 0,85n \geqslant 40 + 0,8n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0,05n \geqslant 6,9 \Rightarrow n \geqslant 138 \quad \text{(138 dias no mínimo)}$$

394. a) Dividindo-se o intervalo $13\,000 \vdash 19\,000$ em 6 subintervalos de amplitude 1 000, cada subintervalo teria frequência de $\frac{9}{6} = 1,5$ jogo.

Assim, o resultado procurado é:

$3 + 4 + 1,5 + 1,5 = 10$ jogos

b) Dividindo-se o intervalo $19000 \vdash 25000$ em 6 subintervalos de amplitude 1000, cada subintervalo teria frequência de $\frac{12}{6} = 2$ jogos.
O número total de jogos é: $5 \cdot 2 + 6 + 4 + 2 = 22$

395. a) O intervalo $50 \vdash 60$ será dividido em 10 subintervalos, com amplitude unitária, cada um contendo $\frac{16800}{10} = 1680$ alunos.
O número de alunos que obtiveram pelo menos 55 pontos é:
$5 \cdot 1680 + 11400 + 10700 + 5100 + 900 = 36500$
A proporção pedida é $\frac{36500}{100000} = 36{,}5\%$.

b) Dividindo o intervalo $30 \vdash 40$ em 10 subintervalos de amplitude unitária, obtemos para cada subintervalo $\frac{14500}{100} = 1450$ alunos.
O número de alunos que obtiveram menos de 37 pontos é:
$1400 + 6900 + 13000 + 7 \cdot 1450 = 31450$
A proporção pedida é $\frac{31450}{100000} = 31{,}45\%$.

c) Divida o intervalo $80 \vdash 90$ em 10 subintervalos com amplitude unitária, cada um contendo $\frac{5100}{10} = 510$ alunos.
Em seguida, calcule a porcentagem de alunos que atingiram 88 pontos ou mais.
$$\frac{510 + 510 + 900}{100000} \times 100\% = 1{,}92\%$$

396. Dividimos o intervalo $1{,}5 \vdash 2{,}0$ em 5 subintervalos, com amplitude 0,1. Cada um desses subintervalos contém $\frac{30}{5} = 6$ cachorros.
Dividimos o intervalo $3{,}0 \vdash 3{,}5$ em 5 subintervalos, com amplitude 0,1. Cada um desses subintervalos contém $\frac{20}{5} = 4$ cachorros.
Assim, o número de cachorros com "pesos" pertencentes a [1,7; 3,3[é:
$$\underbrace{3 \cdot 6}_{\text{"pesos" de 1,7 a 2,0}} + \underbrace{42}_{\text{"pesos" de 2,0 a 2,5}} + \underbrace{27}_{\text{"pesos" de 2,5 a 3,0}} + \underbrace{3 \cdot 4}_{\text{"pesos" de 3,0 a 3,3}} = 99$$
A proporção pedida é, portanto, $\frac{99}{160} = 61{,}875\%$.

398. b) x(0,25) pertence ao primeiro intervalo. Temos:
$$\frac{x(0{,}25) - 10}{25\%} = \frac{20 - 10}{30\%} \Rightarrow x(0{,}25) = 18{,}\overline{3}$$
$x(0{,}75) = 40$, pois os três primeiros intervalos reunidos contêm $30\% + 10\% + 35\% = 75\%$ dos voos.

Assim, o intervalo interquartil é: $[18,\overline{3}; 40]$

d) Do enunciado, conclui-se que o nono decil — x(0,90) — é igual a *n*. Por outro lado x(0,90) pertence ao último intervalo. Temos:

$$\frac{x(0{,}90) - 40}{90\% - (30\% + 10\% + 35\%)} = \frac{50 - 40}{25\%} \Rightarrow \frac{x(0{,}90) - 40}{15\%} = \frac{10}{25\%} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x(0{,}90) = 46$, isto é, $n = 46$

399. O terceiro quartil — x(0,75) — é um valor que divide o conjunto de notas em dois grupos: o primeiro contém, entre todas as notas, as 75% menores e o segundo, as 25% maiores.

Assim, de acordo com o enunciado, o problema se resume a encontrar x(0,75).

Observando as porcentagens acumuladas, concluímos que x(0,75) pertence ao penúltimo intervalo. Temos:

$$\frac{x(0{,}75) - 6}{75\% - (7{,}5\% + 33{,}75\% + 30\%)} = \frac{8 - 6}{20\%} \Rightarrow \frac{x(0{,}75) - 6}{3{,}75\%} = \frac{2}{20\%} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x(0{,}75) = 6{,}375$

Logo, do conjunto de todas as notas, as 25% maiores são superiores (ou iguais) a 6,375.

400. a) $\bar{x} = 2{,}5 \cdot 0{,}07 + 7{,}5 \cdot 0{,}195 + 12{,}5 \cdot 0{,}335 + 17{,}5 \cdot 0{,}285 + 22{,}5 \cdot 0{,}105 + 27{,}5 \cdot 0{,}01 \Rightarrow \bar{x} = 13{,}45$ minutos

Assim, a medida não surtiu efeito, pois a média continuou abaixo dos 15 minutos.

b) É preciso encontrar o primeiro quartil — x(0,25).

x(0,25) pertence ao intervalo $5 \vdash 10$ (observe as porcentagens acumuladas).

Temos: $\dfrac{x(0{,}25) - 5}{25\% - 7\%} = \dfrac{10 - 5}{19{,}5\%} \Rightarrow x(0{,}25) = 9{,}61$

A interpretação é: No conjunto de todos os tempos de leitura, 25% deles são inferiores a 9,61 minutos e 75% excedem 9,61 minutos. Assim, a meta foi estabelecida, uma vez que $9{,}61 > 8$.

401. Temos:

- A classe A fica definida pelo segundo decil — x(0,20) —, que pertence ao intervalo $100 \vdash 150$. Temos:

  $\dfrac{x(0{,}20) - 100}{20\% - 2{,}5\%} = \dfrac{150 - 100}{30\%} \Rightarrow x(0{,}20) \cong 129$

  Assim, no conjunto de todos os peixes, os 20% mais leves têm "pesos" até 129 g.
- Podemos encontrar o limite inferior da classe C (e desse modo, a classe B ficaria automaticamente determinada).

  A classe C fica definida pelo sétimo decil — x(0,70) —, que pertence ao intervalo $200 \vdash 250$. Temos:

$$\frac{x(0{,}70) - 200}{70\% - (2{,}5\% + 30\% + 27{,}5\%)} = \frac{250 - 200}{35\%} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x(0{,}70) - 200}{10\%} = \frac{50}{35\%} \Rightarrow x(0{,}70) \cong 214$$

No conjunto de todos os peixes, os 30% mais pesados têm "pesos" maiores que 214 g.

Desse modo, os limites aproximados de "pesos" são:

classe A: 50 g $\vdash$ 129 g; classe B: 129 g $\vdash$ 214 g;

classe C: 214 g $\vdash$ 300 g.

402. Inicialmente vamos encontrar as frequências relativas de cada intervalo:

$a \vdash b$	$\frac{24}{300} = 0{,}08 = 8\%$
$b \vdash c$	$\frac{60}{300} = 0{,}20 = 20\%$
$c \vdash 100$	$\frac{135}{300} = 0{,}45 = 45\%$
$100 \vdash e$	$\frac{54}{300} = 0{,}18 = 18\%$
$e \vdash f$	$\frac{18}{300} = 0{,}06 = 6\%$
$f \vdash g$	$\frac{9}{300} = 0{,}03 = 3\%$

- Do enunciado, se 20% dos proprietários gastam até 58 reais, concluímos que $x(0{,}20) = 58$.

  Notando que $x(0{,}20)$ está no intervalo $b \vdash c$, podemos escrever:

  $$\frac{x(0{,}20) - b}{20\% - 8\%} = \frac{c - b}{20\%} \Rightarrow \frac{58 - b}{12\%} = \frac{c - b}{20\%} \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow 1160 - 20b = 12c - 12b \Rightarrow \boxed{12c + 8b = 1160} \ (*)$$

- Do enunciado, se 30% dos proprietários têm gastos superiores (ou iguais) a 98 reais, concluímos que $x(0{,}70) = 98$.

  Notando que $x(0{,}70)$ está no intervalo $c \vdash 100$, podemos escrever:

  $$\frac{x(0{,}70) - c}{70\% - (8\% + 20\%)} = \frac{100 - c}{45\%} \Rightarrow \frac{98 - c}{42\%} = \frac{100 - c}{45\%}$$

  $4\,410 - 45c = 4200 - 42c \Rightarrow 210 = 3c \Rightarrow c = 70$

  Substituindo em (*), vem:

  $12 \cdot 70 + 8b = 1160 \Rightarrow 8b = 320 \Rightarrow b = 40$

  Supondo-se agora que todas as classes tenham a mesma amplitude (30), segue que $a = 10$, $e = 130$, $f = 160$ e $g = 190$.

405. É preciso encontrar o terceiro decil — x(0,30).
Notando que x(0,30) pertence ao segundo intervalo, podemos escrever:
$$\frac{x(0,30) - 60}{30\% - 20\%} = \frac{100 - 60}{50\%} \Rightarrow \frac{x(0,30) - 60}{10\%} = \frac{40}{50\%} \Rightarrow x(0,30) = 68$$
O significado é:
Entre todos os imóveis do município, os 30% menores têm área até 68 m^2 e, portanto, essa área define o limite de isenção do IPTU.

APÊNDICE I — Média geométrica

408. $A = G + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{n + 4}{2} = \sqrt{4 \cdot n} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{n + 3}{2} = \sqrt{4n} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\frac{n + 3}{2}\right)^2 = (\sqrt{4n})^2 \Rightarrow \frac{n^2 + 6n + 9}{4} = 4n \Rightarrow n^2 - 10n + 9 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 1$ ou $n = 9$

410. $A = 7,\overline{6} \Rightarrow \frac{x + y + 12}{3} = \frac{23}{3} \Rightarrow x + y = 11$
$G = 6 \Rightarrow \sqrt[3]{12xy} = 6 \Rightarrow 12xy = 216 \Rightarrow xy = 18$
$(x = 2$ e $y = 9)$
ou
$(x = 9$ e $y = 2)$

411. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0 \Rightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geqslant 0 \Rightarrow a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$
Logo, $A \geqslant G$
$A = G \Rightarrow \frac{a + b}{2} = \sqrt{ab} \Rightarrow \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = (\sqrt{ab})^2 \Rightarrow \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = ab \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Rightarrow (a - b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$

APÊNDICE II — Média harmônica

414. $H = \left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{\frac{b + a}{ab}}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{b + a}{2ab}\right)^{-1} = \frac{2ab}{a + b}$

416. Temos $H = \frac{2ab}{a + b}$ (ver exercício 414).
Assim: $4,8 = \frac{2 \cdot a \cdot 6}{a + 6} \Rightarrow 12a = 4,8a + 28,8 \Rightarrow a = 4$
- Média aritmética: $A = \frac{4 + 6}{2} = 5$
- Média geométrica: $G = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$

417. Sim. $A = H \Rightarrow \frac{a + b}{2} = \frac{2ab}{a + b} \Rightarrow (a + b)^2 = 4ab \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Rightarrow (a - b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR é uma coleção consagrada ao longo dos anos por oferecer ao estudante o mais completo conteúdo de Matemática elementar. Os volumes estão organizados da seguinte forma:

VOLUME 1	conjuntos, funções
VOLUME 2	logaritmos
VOLUME 3	trigonometria
VOLUME 4	sequências, matrizes, determinantes, sistemas
VOLUME 5	combinatória, probabilidade
VOLUME 6	complexos, polinômios, equações
VOLUME 7	geometria analítica
VOLUME 8	limites, derivadas, noções de integral
VOLUME 9	geometria plana
VOLUME 10	geometria espacial
VOLUME 11	matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva

A coleção atende a alunos do ensino médio que procuram uma formação mais aprofundada, estudantes em fase pré-vestibular e também universitários que necessitam rever a Matemática elementar.

Os volumes contêm teoria e exercícios de aplicação, além de uma seção de questões de vestibulares, acompanhadas de respostas. Há ainda uma série de artigos sobre história da Matemática relacionados aos temas abordados.

Na presente edição, a seção de questões de vestibulares foi atualizada, apresentando novos testes e questões dissertativas selecionados a partir dos melhores vestibulares do país.

Atual Editora

ISBN 978-85-357-1761-7